ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2018

А. Л. Талис, А. Л. Рабинович (Москва, ИНЭОС РАН; Петрозаводск, ИБ КарНЦ РАН). **Тетраблок и тетраэдрические цепи с «некристаллографической» симметрией.**

Строение *линейной* подструктуры упорядоченной структуры в 3-мерном евклидовом пространстве E^3 может определяться симметрией *линейной* подструктуры неевклидового пространства [1]. Если линейные цепи образованы из одинаковых правильных тетраэдров, объединенных по граням, то в E^3 возможно отображение их «некристаллографической» («скрытой») симметрии. Для цепей ограниченной длины оно достигается возможностью их вложения в регулярные тетраэдрические разбиения 3-мерных пространств постоянной положительной (сфера S^3) и отрицательной (H^3) кривизны: в «политоп $\{3,3,5\}$ » (120-вершинный 4-мерный многогранник) [2, p.153] и в гиперболические соты $\{3,3,6\}$ [3], соответственно. Нами показано [1], что в 3-мерных пространствах для таких цепей существует универсальная структурная «единица», — тетраблок, являющийся линейным 7-вершинным объединением по граням четырех правильных тетраэдров. Тетраблок обладает группой симметрии (порядка $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$ [1]), изоморфной проективной специальной линейной группе $PSL(2,7)$, отображающей симметрию квартики Клейна — особой подструктуры триангулированной гиперболической плоскости. Группа $PSL(2,7)$ изоморфна группе $PSL(3,2)$, — это группы $L_2(7)$ и $L_3(2)$ в иных обозначениях [4, p.x]. Рассмотрим в E^3 линейные цепи, состоящие из конечного числа тетраблоков, которые не имеют общих тетраэдров и однотипно соединены по торцевым ребрам или вершинам. Такие цепи можно привести (преобразуя, при необходимости, неэнантиоморфный вариант тетраблока в энантиоморфный, а также используя имеющиеся степени свободы в местах объединений) к виду спиралей из тетраблоков. Если цепь при этом может быть строго вложена в тор из политопа $\{3,3,5\}$, состоящий из 30 тетраэдров (30 вершин такого тора принадлежат трем 10-реберным цепочкам [2, p. 247]), то эта цепь будет обладать группой S_8 (симметрической группой степени 8) [5, p. 29], являющейся подгруппой группы $2^6 : S_8$, где двоеточие означает полупрямое произведение. Группа $2^6 : S_8$ — одна из 17 максимальных подгрупп группы $2 \cdot O_8^+(2)$, где $O_8^+(2)$ — группа ортогональных преобразований 8-мерной кристаллографической решетки E_8 [4, p. 85; 5]. Действительно, группу S_8 можно представить в виде произведений своих подгрупп, $D_{30} \cdot (2^3 : PSL(3,2))$ или $S_3 \times D_{10} \cdot (2^3 : PSL(3,2))$ [5, p. 29], где символ $\times$ означает прямое произведение; $2^3 : PSL(3,2) \equiv AGL_3(2)$, $AGL_3(2)$ — аффинная общая линейная группа [5, p. 29]; D_{30} и D_{10} — диэдральные группы; $D_{30} = C_{30} : 2$, $D_{10} = C_{10} : 2$, где C_{30}, C_{10} — циклические группы порядков 30 и 10, $C_{30} = C_5 \times C_6$. Решетка E_8 имеет группу симметрии, порядок которой (696729600 элементов) максимален из всех групп отражений, и 120 векторов (из 240) 1-ой координационной сферы решетки E_8 однозначно определяют политоп $\{3,3,5\}$ [6]. Получение спиралей из тетраблоков: если сохранить положения 30 вершин тора, но удалить равноотстоящие друг от друга k ребер, то образуются: (а) при $k = 1$ — спираль из 6 тетраблоков, соединенных по торцевым ребрам (в политопе $\{3,3,5\}$ это соединение возможно для цепей из $\leqslant 6$ тетраблоков); (б) при $k = 3$ — спираль из 5 тетраблоков, соединенных по торцевым вершинам (в политопе $\{3,3,5\}$ это соединение возможно для цепей из

$\leqslant 5$ тетраблоков). В варианте (б) 5 центров тетраблоков и 5 общих для соседних тетраблоков торцевых вершин образуют одну сохранившуюся 10-реберную цепочку тора. Итак, эти спирали из 6 и 5 тетраблоков обладают симметрией, как минимум, подгрупп $C_6 \cdot PSL(3,2)$ и $C_5 \cdot PSL(3,2)$ группы $((C_5 \times C_6):2)\cdot(2^3 : PSL(3,2))$, соответственно. Симметрия решетки E_8 такова, что 240 векторов ее 1-ой координационной сферы могут быть разбиты на 8 подмножеств по 30 векторов [6; p.39] или на 10 подмножеств по 24 вектора [7]. Для определения симметрии спиралей из тетраблоков необходимо найти максимальные надгруппы для группы $PSL(3,2)$, которые вкладываются в группу симметрии решетки E_8 в соответствии с этими вариантами. Такое вложение гарантирует необходимую тетраэдрическую геометрию системы: E_8 позволяет построить политоп $\{3,3,5\}$. В частности, максимальная подгруппа $2^4 : A_8$, — одна из 9 максимальных подгрупп группы Матье M_{24} [4, p.96], содержащая $PSL(3,2)$, вкладывается в подгруппу $2^6 : S_8$ группы E_8 по 1-му варианту [4, p. 85]; это привело к рассмотренным спиралям из 6 и 5 тетраблоков. Другая максимальная подгруппа группы M_{24}, — трионная $2^6 : (PSL(3,2) \times S_3)$, определяет симметрию, соответствующую 2-му варианту. Нами показано, что трионной подгруппой определяется симметрия цепи из 4 тетраблоков, соединенных по торцевым вершинам.

Работа выполнена по теме № 0221-2017-0050 (№ г.р. АААА-А17-117031710039-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рабинович А. Л.*, *Талис А. Л.* ОППМ, 2018, 25, 2, в печати.
2. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes. N.Y.: Dover Publ., 1973.
3. *Görner M.* arXiv:1406.2827v3 [math.GT], 2016.
4. *Conway J. H. et al.* Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
5. *Li C. H.*, *Xia B.* arXiv:1408.0350v3 [math.GR], 2016.
6. *Coxeter H. S. M.* Mathematische Zeitschrift, 1988, 200, 3–45.
7. *Manton N. S.* Commun. Math. Phys., 1987, 113, 341–351.