ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2018

А. М. Ветошкин (Москва, МГТУ МФ)**. Произведение проекторов. Случай вложенных подпространств.**

Пусть P — квадратная матрица с комплексными элементами. Она называется проектором, если $P = P^2$.

Обозначим матрицу, проектирующую на подпространство L вдоль дополнительного подпространства M, как $P(L, M)$.

Пусть X, U и Y, V — пары дополнительных подпространств. Сумма проекторов $P(X,U)+P(Y,V)$ является проектором тогда и только тогда, когда $X \subset V$ и $Y \subset U$ (см. например, [1], [2]), причем:

$$P(X,U) + P(Y,V) = P(X + Y, U \cap V). \tag{1}$$

Фактом (1) удобно пользоваться в следующей форме: *если подпространства* X, Y *и* Z *попарно пересекаются только по нулевому вектору и* $X + Y + Z = C^n$, *то*

$$P(X+Y, Z) = P(X, Y+Z) + P(Y, X+Z). \tag{2}$$

Приведем следующие формулы (см. [3]):

$$I - P(A,B) \;=\; P(B,A), \tag{3}$$

$$P^*(A,B) \;=\; P(B^{\perp}, A^{\perp}). \tag{4}$$

Хорошо известны факты о проекторах:

$$P(A,B)\,P(A,C) = P(A,C), \quad P(A,B)\,P(C,B) = P(A,B).$$

В данной работе предлагается обобщение последних формул для случая, когда среди подпространств, определяющих два проектора $P(A,B), P(C,D)$, есть вложение подпространств, например $A \subset C$.

Теорема *Пусть* (A, B) *и* (C, D) *— две пары дополнительных подпространств и* $A \subset C$. *Тогда выполняются равенства*:

$$P(A,B)\,P(C,D) \;=\; P(A, D+(B \cap C)), \tag{5}$$

$$P(A,B)\,P(D,C) \;=\; P(A,B) - P(A, D+(B \cap C)), \tag{6}$$

$$P(B,A)\,P(C,D) \;=\; P(B \cap C, A+D), \tag{7}$$

$$P(B,A)\,P(D,C) \;=\; P(B \cap (A+D), C), \tag{8}$$

$$P(C,D)\,P(A,B) \;=\; P(A,B), \tag{9}$$

$$P(D,C)\,P(A,B) \;=\; 0, \tag{10}$$

$$P(C,D)\,P(B,A) \;=\; P(C,D) - P(A,B), \tag{11}$$

$$P(D,C)\,P(B,A) \;=\; P(D,C). \tag{12}$$

Свойство (10) очевидно. Свойства (9), (12) получаем, учитывая (3) и (10). Учитывая (3), из (9) получаем (11). Для доказательства (5) обозначим: $p = P(A,B)$, $q = P(C,D)$. Так как $qp = p$, то $r = (pq)^2 = p\,(qp)\,q = pq$ — проектор. В книге [3, с. 138] приводится результат, состоящий в том, что если проектор r есть произведение проекторов $P(A,B)\,P(C,D)$, то $r = P(A \cap (C{+}(B \cap D)),\ D{+}(B \cap (A{+}C)))$.

В нашем случае $r = P(A, D{+}(B \cap C))$, так как $A \subset C$. Учитывая (3), из (5) получаем (6).

Применим сначала (4), а затем (5) к левой части (8):

$$\begin{aligned} P(B,A)\,P(D,C) &= [P(C^{\perp},D^{\perp})P(A^{\perp},B^{\perp})]^{*} \\ &= [P(C^{\perp},B^{\perp}{+}A^{\perp}\cap D^{\perp})]^{*} = P(B\cap(A{+}D),C). \end{aligned}$$

Пусть $C = A + F$. Применим сначала (2), а затем (8) к левой части (7):

$$\begin{aligned} &P(B,A)\,[P(A,F{+}D) + P(F,A{+}D)] = P(B,A)P(F,A{+}D) \\ &= P(B\cap(A{+}F),A{+}D) = P(B\cap C,A{+}D). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Интересно, что все выражения (5)–(12) или сами являются проекторами, или дают проектор при возведении в квадрат. Так в (6), учитывая (10), имеем $(P(A,B)\,P(D,C))^2 = 0$. Возведем левую часть (11) в квадрат, применим (7):

$$\big(P(C,D)\,P(B,A)\big)^2 = P(C,D)P(B\cap C,A{+}D)P(B,A).$$

В последнем выражении можно отбросить первый и последний множители, учитывая, соответственно, (9) и (12). Получим:

$$\big(P(C,D)\,P(B,A)\big)^2 = P(B,A)\,P(C,D) = P(B\cap C,A{+}D).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М.: Наука/Физматлит, 1986, 229 с.
2. *Ben-Israel A.*, *Greville T. N. E.* Generalized Inverses. Theory and Applications. Heidelberg etc.: Springer, 2003, 420 p.
3. *Глазман И. М.*, *Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука/Физматлит, 1969, 476 с.