ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2018

Е. М. Богатов (Старый Оскол, СТИ НИТУ МИСИС; Губкин, Губкинский филиал НИТУ МИСИС). **Об истории развития вариационных методов и нелинейной механики в СССР.**

Вариационные методы решения уравнений вида $F(u) = 0$ вошли в обиход математиков во второй половине XIX в. после работ К. Ф. Гаусса, Н. Томсона и П. Г. Л. Дирихле [1]. Новизна их исследований заключалась в возможности доказывать разрешимость граничных задач на основе существования решений соответствующих вариационных задач вида

$$J(u) \to \min . \tag{1}$$

Строгое обоснование данного принципа (называемого принципом Дирихле) было дано Д. Гильбертом [2]–[3] в 1900–1904 гг. Он предложил общий метод доказательства существования решений вариационной задачи (1), заключающийся в построении компактной последовательности функций $\{u_n(x)\}$, минимизирующей (линейный непрерывный) функционал $J(u)$ и сходящейся к искомому решению в классе допустимых функций. Предложенный Гильбертом метод был назван впоследствии *прямым методом вариационного исчисления.*

Наша основная цель — проследить

- как трансформировался метод Гильберта применительно к решению нелинейных задач;
- как он проявил себя в задачах нелинейной механики;
- как он повлиял на развитие функционального анализа в целом;
- какое развитие он получил в СССР до середины 1950-х гг.

Новое направление в развитии прямых методов было связано с работой У. Ритца 1909 г. [4]. Он предложил представлять члены минимизирующей последовательности $\{u_n\}$ в виде линейной комбинации функций φ_i, принадлежащих некоторой базисной системе:

$$u_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n.$$

Исходная задача (1) заменялась при этом конечномерной — нахождением $\min_{c_1,\ldots,c_n} J(u_n) = \mu_n$. Ритц полагал, что если функционал $J[u]$ непрерывен (в смысле метрики пространства, в котором он рассматривается) и система функций φ_i полная, то можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu = \min J. \tag{2}$$

Доказательство (2) было проведено им для конкретных примеров линейных задач.

Переход на нелинейные задачи был впервые осуществлен Л. Лихтенштейном в 1915 г. [5]. Он рассмотрел краевую задачу вида

$$\begin{cases} y'' + f(x, y(x)) = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

и свел ее к задаче минимизации функционала

$$\Phi(y) = \int_0^\pi \left[\frac{(y'(x))^2}{2} - F(x, y(x))\right] dx,$$

где $F(x,y) = \int_0^y f(x,s)ds \leqslant A$. Допустимым явилось множество функций $\{y(x)\}$, соответствующее $C_0^1[0,\pi]$.

Следует отметить, что у Лихтенштейна присутствовал ряд составляющих современного прямого метода вариационного исчисления (подробности см. в [6]).

Более общий результат был получен А. Гаммерштейном в 1930 г. при доказательстве разрешимости уравнения его имени с использованием системы собственных функций соответствующей линейной задачи [7].

Абстрактный аналог уравнения Гаммерштейна

$$u - H^2 G(u) = 0 \tag{3}$$

был изучен М. Голомбом в 1935 г. [8]. Здесь $H : E \to E$ — ограниченный, вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве E; G является градиентом вещественной функции F. Решение (3) получается путем минимизации функционала $\Psi(u) = (u,u) - 2F(Hu)$.

В 1937 г. прямой метод вариационного исчисления был использован С. Л. Соболевым при доказательстве разрешимости первой краевой задачи для полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0 \tag{4}$$

в области $D \subset R^n$ с краевыми условиями на многообразиях разной размерности [9]. Применив модифицированный метод Гильберта, Соболев показал, что предельная функция $u^* = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ удовлетворяет уравнению (4) и граничным условиям в *слабом* смысле:

$$\int_D u^* \Delta^m \varphi dx = 0 \tag{5}$$

для любой гладкой финитной функции φ.

Отличительной чертой подхода Соболева явилось появление интегральных тождеств вида (5), расширяющих трактовку решений, что естественным образом повлекло за собой необходимость введения нового понятия производной [10]. Возможность рассматривать решения уравнений математической физики в расширенном смысле (в пространствах соболевского типа) позволило провести анализ разрешимости целого ряда задач, в том числе нелинейных (см., например, [11]).

В докладе будет рассматриваться также развитие *качественных* методов анализа нелинейных задач, допускающих вариационную постановку. Эти методы берут начало от исследований А. Пуанкаре 1905 г., относящихся к задачам о геодезических на выпуклых поверхностях [12]. Топологический подход к решению вариационных задач, начатый А. Пуанкаре, был продолжен в конце 1920-х гг в СССР Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом. С помощью введенного ими топологического инварианта *категории* им удалось оценить снизу число геометрически различных критических точек функций, заданных на многообразиях [13]. Перенося понятия категории и основные результаты на случай функционалов, Люстерник и Шнирельман получили возможность оценивать число решений вариационных задач.

На основе теории категорий Люстерник в 1939 г. получил оценки количества критических точек функционалов в гильбертовом пространстве, обобщив свойство квадратичного слабо непрерывного функционала обладать счетной системой критических точек [14].

В начале 1950-х гг. исследования Голомба, Люстерника и Шнирельмана получили свое развитие в работах М. А. Красносельского [15] и М. М. Вайнберга [16]. Они вывели ряд общих признаков существования критических точек функционалов в гильбертовом и банаховом пространствах и применили их к доказательству разрешимости уравнений Гаммерштейна и Ляпунова–Лихтенштейна, изучению их спектра, точек бифуркации и поведения собственных функций.

В заключении будет рассмотрено решение вопроса обоснования линеаризации Л. Эйлера, полученное тополого-вариационными методами функционального анализа в задачах потери устойчивости стержней [16] (М. А. Красносельский) и пластин [17] (И. И. Ворович).

Автор выражает благодарность Р. Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСИС, г. Старый Оскол) за постановку задачи и внимание к работе, а также В. П. Богатовой за помощь в переводе первоисточников с немецкого языка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петрова С. С.* О принципе Дирихле. — ИМЕН, 1966, в. V, с. 200–218.
2. *Hilbert D.* Über das Dirichlet'sche Princip. — Jahresber. Deutschen Math., 1900, v. 8, p. 184–188.
3. *Hilbert D.* Über das Dirichlet'sche Princip. — Math. Ann., 1904, v. 59, p. 161–186.
4. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. — J. Reine Angew. Math., 1909, v. 135, p. 1–61.
5. *Lichtenstein L.* Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. — J. für Math., 1915, v. 145, p. 24–85.
6. *Mawhin J.* Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations: from successive approximations to topology. — Development of Mathematics 1900–1950. Luxembourg, 1992, p. 443–477.
7. *Hammerstein A.* Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. — Acta Math., 1930, v. 54, p. 117–176.
8. *Golomb M.* Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen. — Math. Zeitschrift, 1935, v. 39, p. 45–75.
9. *Соболев С. Л.* Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений. — Матем. сб., 1937, т. 2, в. (44):3, с. 465–499.
10. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа. — Матем. сб., 1938, т. 4, в. (46):3, с. 471–497.
11. *Киселев А. А.*, *Ладыженская О. А.* О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, в. 5, с. 655–680.
12. *Poincaré H.* Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1905, v. 6, p. 237–274.
13. *Люстерник Л. А.*, *Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Иссл. ин-т матем. и мех. при 1 МГУ, 1930, 68 с.
14. *Люстерник Л. А.* Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. — Изв. РАН. Серия матем., 1939, т. 3, в. 3, с. 257–264.
15. *Красносельский М. А.* Новые теоремы существования решений у нелинейных интегральных уравнений. — ДАН СССР, 1953, т. 88, в. 6, с. 949–952.
16. *Вайнберг М. М.* О некоторых вариационных принципах в теории операторных уравнений. — УМН, 1952, т. 7, в. 2(48), с. 197–200.
17. *Красносельский М. А.* Рассмотрение спектра нелинейного оператора в окрестности точки бифуркации и применения к задаче о продольном изгибе сжатого стержня. — УМН, 1957, т. 12, в. 1(73), с. 203–208.
18. *Ворович И. И.* Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. — Докл. АН СССР, 1958, т. 122, в. 1, с. 37–40.