ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2018

В. А. Лебедев (Москва, МГУ). **Модель Блэка–Шоулса для экспоненциалов общих процессов Леви.**

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определен финансовый рынок с непрерывным временем $t \in [0, T]$, состоящий из рискованного финансового актива S и финансового актива с постоянной нормой прибыли B. Предполагается, что S является экспонентой процесса Леви X (т. е. стохастически непрерывного однородного случайного процесса с независимыми приращениями) с $\mathbf{E}S_t^2 < \infty$ для всех $t \in [0, T]$ и удовлетворяет уравнению

$$S_t = x + \mu \int_0^t S_{s-} ds + \sigma \int_0^t S_{s-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S_s(e^u - 1)(p - \pi)(ds \times du), \tag{1}$$

где $x > 0$, μ и σ — константы, W — винеровский процесс, p — мера скачков процесса X, а π ее неслучайный компенсатор вида $\pi(dt \times du) = dt\Lambda(du)$ относительно естественного потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$ для процесса X или S. Актив же B имеет вид $B_t = B_0 e^{rt}$ при $t \in [0, t]$ для некоторых констант $B_0 > 0$ и r, и тогда он удовлетворяет уравнению $dB_t = rB_t dt$.

Кроме основных финансовых активов, имеются также производные, выполняющие страховочные функции по отношению к рыночным операциям. В нашей модели таким будет европейский колл-опцион, дающий его обладателю право купить в момент T актив S_T по фиксированной цене K, что в итоге дает ему доход $(S_T - K)^+$.

Из долей активов S и B может быть образован инвестиционный портфель $Y_t = a_t S_t + b_t B_t$ с некоторыми предсказуемыми a и b. Такой портфель называется самофинансируемым, если $Y_t = Y_0 + \int_0^t a_s dS_t + \int_0^t b_s dB_s$ $\mathbf{P}$-п. н. в каждый марковский момент непрерывности процесса S.

Возникает задача определения справедливой цены нашего опциона. В случае, когда в уравнении (1) отсутствует скачкообразный член, задача исчерпывающим образом решена Блэком и Шоулсом, и в этом случае для нашего опциона существует совершенный хеджирующий самофинансируемый портфель, т.е. $Y_T = (S_T - K)^+$.

Если в уравнении (1) имеется ненулевой скачкообразный член, то совершенного хеджирующего самофинансируемого портфеля не существует, но можно в классе портфелей вида $dY + t = \widehat{a}_t dS_t + \widehat{b}_t dB_t$ с некоторыми предсказуемыми процессами $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$, в который входят и самофинансируемые портфели, найти $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$, обеспечивающие наименьшую среднеквадратичную ошибку хеджирования.

Аналогично работам [1] и [2] функция Z цены совершенного хеджирования удовлетворяет фундаментальному уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - r\,Z + L_{t,x}\,Z \,=\, 0,$$

$$Z(T, x) \,=\, (x_K)^+,$$

где $L_{t,x}$ — инфинитезимальный (интегро-дифференциальный) оператор для процесса S. Для минимизации среднеквадратической ошибки хеджирования мы выберем $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$

так, чтобы разность между процессами $Z(t, S_t)$ и Y_t была квадратично интегрируемым мартингалом с наименьшей дисперсией. Берем $Y_0 = Z(0, x_0)$ и

$$\begin{aligned} Z(t, S_t) \;&=\; Y_0 + \int_0^t \left[\frac{\partial Z(s,x)}{\partial s}\bigg|_{x=S_{s-}} + L_{s,x} Z(s,x)|_{x=S_{s-}} \right] ds \\ &\quad + \sigma \int_0^t \frac{\partial Z(s,x)}{\partial x}\bigg|_{x=S_{s-}} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [z(s, S_{s-}e^u) - Z(s, S_{s-})](p-\pi) * ds \times du) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Y_t \;&=\; Y_0 + \int_0^t \widehat{a}_s dS_s + \int_0^t \widehat{b}_s dB_s \\ &=\; Y_0 + \int_0^t \left(\mu \widehat{a}_s S_{s-} + r \widehat{b}_s B_s\right) ds + \sigma \int_0^t \widehat{a}_s S_s d\,W_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \widehat{a}_s\, S_{s-} (e^u - 1)\,(p-\pi)\,(ds \times du). \end{aligned}$$

Выбираем $\widehat{a}$ при каждом t так, чтобы минимизировать производную по t предсказуемой квадратичной характеристики разности мартингальных членов в выражениях для $Z(t, S_t)$ и Y_t, а потом для нахождения $\widehat{b}_t$ мы приравниваем подынтегральные функции по dt. Мы не будем приводить явные формулы для $\widehat{a}_t$ и $\widehat{b}_t$ из-за их громоздкости, отметим лишь, что их выбор на цену хеджирования не влияет, так как разность между $Z(t, S_t)$ и так построенным Y_t является мартингалом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики, тт. 1–2. М.: МЦНМО, 2016.
2. *Белявский Г. И.*, *Данилова Н. В.* Процессы Леви (краткий курс). — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 237, в. 3.1, с. 193–289.