

С. Е. Холодовский (Чита, ЗабГУ). Решение краевых задач для уравнения Пуассона в кусочно-однородной полуплоскости, ограниченной сильнопроницаемой пленкой.

Рассмотрим в кусочно-однородной полуплоскости $D = D_1 \cup D_2$ для функций $u_i(x, y)$ в D_i задачу

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = H(x, y), \quad A\partial_y^2 u_i + \partial_y u_i|_{y=0} = 0, \quad (1)$$

$$x = 0: \quad u_1 = u_2, \quad k_1\partial_x u_1 = k_2\partial_x u_2, \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\partial_y^n = \partial^n / \partial y^n$, $D_1 = (x < 0) \times (y < 0)$, $D_2 = (x > 0) \times (y < 0)$, k_i — проницаемость D_i , граница $y = 0$ является сильнопроницаемой пленкой с параметром A [1]. Методом свёртывания разложений Фурье [1] выразим решение задачи (1),(2) через решение $f(x, y)$ уравнения Пуассона на всей плоскости R^2 :

$$\Delta f = \begin{cases} H(x, y), & (x, y) \in D_2, \\ 0, & (x, y) \in R^2 \setminus D_2. \end{cases} \quad (3)$$

В частности $f(x, y)$ — гармоническая в R^2 функция, имеющая заданные особые точки в D_2 . Представляя функции $u_i(x, y)$ (1), (2) в виде

$$u_1(x, y) = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} F(x, y), \quad u_2(x, y) = F(x, y) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} F(-x, y), \quad (4)$$

для функции $F(x, y)$ получим задачу на однородной полуплоскости D :

$$\Delta F = \begin{cases} H(x, y), & (x, y) \in D_2, \\ 0, & (x, y) \in D_1, \end{cases} \quad A\partial_y^2 F + \partial_y F|_{y=0} = 0. \quad (5)$$

Разлагая функцию $f(x, 0)$ (3) в интеграл Фурье: $f(x, 0) = \int_0^\infty g(x, \lambda) d\lambda$, $g(x, \lambda) = g_1(\lambda) \sin \lambda x + g_2(x, \lambda) \cos \lambda x$, при $y \geq 0$ получим

$$f(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} g(x, \lambda) d\lambda, \quad \int_0^\infty e^{-\gamma t} f(x, y + t) dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda y} g(x, \lambda)}{\lambda + \gamma} d\lambda.$$

Отсюда решение задачи (5) найдем в виде (без разложений Фурье):

$$F(x, y) = f(x, y) - f(x, -y) + 2\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma t} f(x, -y + t) dt, \quad y < 0. \quad (6)$$

Решение исходной задачи (1), (2) строится по формулам (4), (6).

Работа выполнена в рамках гранта № 250-ГР Совета по научной и инновационной деятельности ЗабГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kholodovskii S. E.* On Multilayer Films on the Boundary of a Half-Space. — *Mathematical Notes*, 2016, v. 99, № 3, p. 426–431.