ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 **МАТЕМАТИКИ** **Выпуск 3**
2018

В. А. Зотов (Москва, МАИ). **Обобщенная модель истечения жидкости из резервуара.**

Построим и исследуем обобщенную математическую модель процесса истечения вязкой несжимаемой жидкости из открытого сверху резервуара с переменным сечением через малое отверстие на дне площади $\sigma(t)$ со скоростью $v(h)$, где $h(t)$ — высота уровня жидкости в сосуде.

Уравнение материального баланса объема вытекшей жидкости за время Δt имеет вид

$$\Delta Q = -S(h)\,\Delta h = \sigma(t)v(h)\,\Delta t. \tag{1}$$

Следовательно для определения величины $h(t)$ необходимо решить задачу Коши

$$S(h)\frac{dh}{dt} + \sigma(t)v(h) = 0, \quad H(0) = H_0, \tag{2}$$

где H_0 — начальная высота уровня жидкости.

Зная решение задачи Коши (2), можно вычислить время T истечения жидкости

$$h(T) = 0,$$

скорость истечения

$$v(t) = v(h(t))$$

и объем вытекшей жидкости

$$Q(t) = \int_0^t \sigma(t)v(t)\,dt.$$

Для расчета конкретного резервуара необходимо априори знать зависимости $S(h)$, $\sigma(t)$ и $v(h)$.

Например, жидкость вытекает из прямого цилиндра постоянного радиуса

$$S(h) = \pi R^2 = \mathrm{const}$$

через малое круглое отверстие на дне

$$\sigma(t) = \pi r^2 = \mathrm{const}$$

по закону Торичелли

$$v(h) = \mu\sqrt{2gh},$$

где μ — коэффициент расхода жидкости $(0 < \mu < 1)$; $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения.

Тогда гидродинамические характеристики процесса истечения выглядят так

$$\begin{aligned} h(t) &= H_0\Big(1 - \frac{t}{T_0}\Big)^2; \\ v(t) &= v_0\Big(1 - \frac{t}{T_0}\Big); \\ Q(t) &= Q_0\Big(2\frac{t}{T_0} - \Big(\frac{t}{T_0}\Big)^2\Big), \end{aligned}$$

где время истечения, начальная скорость и объем равны

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{\mu}\Big(\frac{R}{r}\Big)^2\sqrt{\frac{2H_0}{g}};\\ v_0 &= \mu\sqrt{2gH_0};\\ Q_0 &= \pi R^2 H_0. \end{aligned}$$

При истечении жидкости через систему малых круглых отверстий постоянных радиусов

$$\{r_i\} = \{r_1 r_2 \ldots r_n\}$$

полное время истечения удовлетворяет условию

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \cdots + \frac{1}{T_n},$$

где T_i — время истечения всего объема жидкости только через малое отверстие радиуса r_i

$$T_i = \frac{1}{\mu}\Big(\frac{R}{r_i}\Big)^2\sqrt{\frac{2H_0}{g}}.$$

В том случае, когда жидкость вытекает из цилиндра через два малых одинаковых круглых отверстия, одно из которых

расположено на дне, а другое — на боковой поверхности на высоте

$$H_1 = kH_0; \qquad 0 < k < 1,$$

полное время истечения равно

$$T = f(k)T_0,$$

где $f(k)$ — выпуклая монотонно возрастающая функция, заключенная в пределах

$$0,5 < f(k) < 1; \quad 0 < k < 1.$$

В частности, для значения $k = 1/2$ время истечения равно

$$T = \frac{4+\sqrt{2}}{6}\,T_0 \approx 0,9\,T_0\,.$$

REFERENCES

1. *Зотов В. А.* Исследование операций в прикладной гидродинамике. — В сб.: Труды V Московской международной конференции по исследованию операций. М.: МАКС Пресс, 2007, с. 122–123.
2. *Зотов В. А.* Нелинейная декомпозиция процесса истечения жидкости из резервуара. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 533–534.