ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2018

И. И. Нараленкова, Е. В. Шивринская (Москва, СУНЦ МГУ). **Кватернионы на уроках математики в СУНЦ МГУ.**

Обучение математике в СУНЦ МГУ осуществляется по программам, разработанным на основе Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования и утвержденным Ученым Советом СУНЦ. Одной из основных целей обучения является «развитие логического мышления, пространственного воображения, творческих способностей на уровне, необходимом для продолжения образования». В данной статье на конкретном примере представлен один из способов достижения и реализации этой цели.

С самого начала в школьной программе по математике появляется понятие числа: натуральные числа, потом целые, рациональные, иррациональные, действительные. Оказывается, что среди них есть волшебные — совершенные числа, числа π, e, золотое сечение. Числа имеют необыкновенные свойства, например, множество рациональных чисел счетно. Числа можно «строить». Оказывается, что к числам применимо понятие размерности — есть комплексные числа (R^2), кватернионы (в каком-то смысле R^4). Получается, что осмысление устройства окружающего мира с древности описывалось с помощью чисел.

В школьной программе с углубленным изучением математики большое внимание уделяется комплексным числам. Как правило, в СУНЦ МГУ мы успеваем рассмотреть и продолжение — «Кватернионы». Тема кватернионов — благодатная. Можно поговорить и о четырехмерном пространстве, и о спинах, и о природе чисел.

Поисками новой числовой системы, которая геометрически реализовывалась бы с помощью трехмерного пространства, вплотную занялся еще в XIX веке Уильям Гамильтон (1805–1865).

Гамильтон строил систему новых чисел, представляющую собой упорядоченные тройки действительных чисел (a, b, c) . Как и в случае комплексных чисел, аналогично для новых, он вводит запись $a + bi + cj,$, где i, j — мнимые единицы, такие числа автор называет «триплетами» («триплет» в переводе с латинского — три).

Гамильтон не сомневался, что теорию триплетов можно будет построить довольно легко, свою статью 1837 года, посвященную комплексным числам, он заканчивает обещанием опубликовать вскоре теорию триплетов.

Действительно, у него не возникло трудностей с определением равенства двух триплетов, умножением триплетов на действительное число, определением суммы и разности этих чисел. Все здесь заключалось в слове покомпонентно.

Трудности возникли при определении произведения таких чисел. Он искал для новой системы такое правило умножения двух чисел, чтобы сохранились все законы арифметики, которые известны для действительных и комплексных чисел: коммутативный закон сложения и умножения, ассоциативный закон для сложения и умножения, дистрибутивный закон умножения относительно сложения. Но на первое место Гамильтон ставил вопрос о решении уравнения: $a \cdot x = b$, где $\neq 0$, a и b — триплеты. Это уравнение всегда должно иметь решение и при этом только одно. Вот здесь и возникло затруднение: какой бы способ умножения триплетов он не подбирал, всегда находились два числа a и b такие, что $a \neq 0$; $b \neq 0$, а их произведение равно нулю. Много позднее было доказано, что для триплетов не существует такого способа умножения, при котором уравнение $a \cdot x = 0$, где $a \neq 0$ всегда имело единственное решение $x = 0$.

И только в 1843 году Гамильтон, гуляя с женой по Королевской набережной, находит решение данной проблемы: как обойти трудности, возникшие при попытке расширить множество комплексных чисел. «**Казалось, что замкнулась электрическая цепь, возникла искра, пришел вестник долгих многих лет неуклонной работы мысли**», — писал он впоследствии. Он понял, что следует рассматривать числовую систему не с тремя единицами, а с четырьмя $1, i, j, k$, где одна единица действительная, а три единицы мнимые, т. е. надо рассматривать не упорядоченную тройку чисел, а упорядоченную четверку чисел и записывать эти числа в виде $a+bi+cj+dk$, где a, b, c, d — действительные числа. Эти числа он назвал кватернионами от латинского слова «quaterni» — по четыре. Он понял, как надо умножать эти числа. Гамильтон был так поражен своим открытием, что вырезал перочинным ножом на деревянных перилах мостика формулу: $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$, которая явилась основой для составления таблицы умножения.

Арифметика кватернионов оказалась таковой: чтобы выражения $z = a + bi + cj + dk$ можно было назвать числами, должны быть определены равенства этих чисел, правила сложения, вычитания, умножения и деления.

Сложение, вычитание и умножение на действительное число вводятся естественным образом. А вот чтобы определить умножение кватернионов задается таблица умножения мнимых единиц.

При определении операции деления кватернионов появляются понятия левого и правого частного.

Таким образом, оказалось, что в исчислении кватернионов имеют место ассоциативный и коммутативные законы для сложения, ассоциативный закон для умножения и дистрибутивный закон для умножения относительно сложения. А вот коммутативный закон для умножения не выполняется.

Этого вполне достаточно, чтобы учащиеся выпускных классов вполне справлялись с задачами о нахождении суммы, разности и произведения таких необычных чисел.

Введение понятия скаляра, вектора, модуля вектора позволяет учащимся исследовать далее свойства кватернионов, а также доказывать, например, что уравнение вида $z^2 + 1 = 0$ имеет бесконечно много решений в исчислении кватернионов. Каждый кватернион, который является вектором с единичным модулем, является корнем такого уравнения.

При помощи данной теории можно, например, доказать, что число, равное 2580, можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

В геометрии кватернионов удобным оказалось представление их в тригонометрической форме. А именно, пусть $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = S(q) + V(q)$, где $S(q)$ — скалярная, $V(q) = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ — векторная часть кватерниона k. Тогда длина данного вектора равна $|V(q)| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Если выбрать угол φ такой, что его

$$\cos\varphi = \frac{S(q)}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \frac{q_0}{|q|}, \quad \text{а} \quad \sin\varphi = \frac{|V(q)|}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \frac{|V(q)|}{|q|},$$

то кватернион примет вид $q = |q| \cdot (\cos\varphi + n \sin\varphi)$.

Определив таким образом форму и рассмотрев свойства, можно, например, учащимся школы найти ось кватерниона $q = 1 + i + j + k$ и его аргумент и записать этот кватернион в тригонометрической форме. Либо, имея два вектора, задаваемых кватернионами, определить третий, образованный поворотом первого вектора относительно второго на заданный угол.

Открытие кватернионов имело огромное значение для развития науки: на базе исчисления кватернионов возникло векторное исчисление, они успешно используются в геометрии, теории чисел, механике, теоретической физике. В последние десятилетия стало ясно, что теория кватернионов является удобным аппаратом для специальной теории относительности.

Если же говорить об изучении темы «Кватернионы» применительно к школьной программе, то знакомство с темой в 11 классе позволяет в рамках концепции непрерывности математического образования повышать интерес учащихся к предмету, расширять их математический кругозор и мотивировать на научную деятельность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: МЦНМО, 2009.
2. *Виленкин Н. Я. и др.* За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. Для учащихся 10–11 кл. общеобразоват. учреждений./ Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. М.: Просвещение: АО «Учеб. Лит.», 1996, 320 с.
3. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: «Наука», 1976, 648 с.
4. *Нараленкова И. И.*, *Селиванова И. Ю.*, *Семенова Т. Г.*, *Шивринская Е. В.* Комплексные числа. Учебное пособие. М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 2012, 36 с.