ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2018

Б. М. Шумилов, А. Жумадилуулу, К. А. Абдыкалыков (Томск, ТГАСУ). **Алгоритм трехдиагональной прогонки вычисления кубических вейвлетов, ортогональных многочленам первой степени.**

Пусть пространство V_L является пространством кубических сплайнов гладкости C^2 на отрезке $[a,b]$ с равномерной сеткой узлов Δ^L :

$$x_i = a + h\cdot i, \qquad i = 0,1,\ldots,2^L, \quad h = \frac{b-a}{2^L},$$

и базисные функции $\varphi_3(v-i)$ $\forall i$, где $v=(x-a)/h$, с центрами в целых числах, порождены сдвигами функции вида [1]:

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-1)^j(t-j)_+^3,$$

где $t_+^n = (\max\{t,0\})^n$. Если на левом конце интервала выполняются нулевые краевые условия $f(a)=f'(a)=0$, то левая базисная функция имеет вид [2]

$$\varphi_b(t) = \frac{3}{2}\,t_+^2 - \frac{11}{12}\,t_+^3 + \frac{3}{2}\,(t-1)_+^3 - \frac{3}{4}\,(t-2)_+^3.$$

На любой сетке Δ^L, $L \geqslant 2$, сплайн 3-й степени с однородными нулевыми краевыми условиями может быть представлен в виде

$$S^L(x) = C_{-1}\varphi_b(v) + \sum_{i=0}^{2^L-4} C_i\,\varphi_3(v-i) + C_{2^L-3}\,\varphi_b(2^L-v), \qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

Если сетка Δ^{L-1}, $L\geqslant 3$, получена из Δ^L посредством удаления нечетных узлов, то пространство V_{L-1} с базисными функциями, у которых носители в два раза больше по ширине и центры в четных узлах сетки Δ^L, вложено в V_L. Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений V_{L-1} и локальных уточняющих подробностей $W_{L-1}=V_L-V_{L-1}$. Кубические вейвлеты, ортогональные всем многочленам первой степени, имеют вид [3], [4]

$$w_3(t) = -0,5\,\varphi_3(2t) + \varphi_3(2t-1) - 0,5\,\varphi_3(2t-2),$$

$$w_b(t) = \varphi_b(2t) - 1,35\,\varphi_3(2t) + 0,6\,\varphi_3(2t-1).$$

Теорема. *Пусть величины* $\Xi^L = [\xi_{-1}, \ldots, \xi_{2^L-3}]^T$ *получены из соотношений*

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \frac{1}{9}\,C_i, \quad i = 0, 2^L-4;\\
\xi_i &= \frac{1}{2}\,C_i, \quad i = 2, 4, \ldots, 2^L-6;\\
446\,\xi_3+150\,\xi_5 &= 27\,C_{-1}+12\,C_0-18\,C_1-48\,C_2+50\,C_3-75\,C_4,\\
6\,\xi_{i-2}+20\,\xi_i+6\,\xi_{i+2} &= 2\,C_i-3\,C_{i-1}-3\,C_{i+1}, \quad i = 5, 7, \ldots, 2^L-9,\\
150\,\xi_{i-2}+446\,\xi_i &= 27\,C_{i+4}+12\,C_{i+3}-18\,C_{i+2}\\
&\quad -48\,C_{i+1}+50\,C_i-75\,C_{i-1}, \quad i = 2^L-7;\\
300\,\xi_1+6\,\xi_3 &= 2\,C_1-3\,C_{-1}-3\,C_2-\frac{4}{3}\,C_0\,,\\
300\,\xi_{2^L-5}+6\,\xi_{2^L-7} &= 2\,C_{2^L-5}-3\,C_{2^L-3}-3\,C_{2^L-6}-\frac{4}{3}\,C_{2^L-4}\,,\\
12\,\xi_{-1}+2\,\xi_1+3\,\xi_3 &= C_1-\frac{3}{2}\,C_2\\
12\,\xi_{2^L-3}+2\,\xi_{2^L-5}+3\,\xi_{2^L-7} &= C_{2^L-5}-\frac{3}{2}\,C_{2^L-6}\,.
\end{aligned}$$

Тогда вектор сплайн-коэффициентов на прореженной сетке Δ^{L-1} представляет собой результат умножения матрицы размера $(2^{L-1}-1)\times(2^L-1)$ на вектор Ξ^L, тогда как вектор вейвлет-коэффициентов равен такому же произведению с матрицей размера $2^{L-1}\times(2^L-1)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Томской области (код проекта 16-41-700400 р_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завьялов Ю. С.*, *Квасов Б. И.*, *Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 448 с.
2. *Wang J.* Cubic spline wavelet bases of Sobolev spaces and multilevel interpolation. — Appl. Comput. Harmon. Anal., 1996, v. 3, № 2, p. 154–163.
3. *Han B.*, *Shen Z.* Wavelets with short support. — SIAM J. Math. Anal., 2006, v. 38, № 2, p. 530–556.
4. *Černá D.*, *Finěk V.* Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems. — Appl. Math. Comput., 2014, v. 243, 15 September 2014, p. 44–56.