ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2016

А. В. Калинкин, **Т. В. Самченко** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Вероятности остановки на границе случайного блуждания в полуполосе.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$, $t\in[0,\infty)$, на множестве состояний $N^3=\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0,1,\ldots\}$, переходные вероятности $P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)=\mathbf{P}\{\xi(t)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\mid\xi(0)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\}$ которого при $t\to 0+$ представимы в виде, $\lambda>0$,

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1+1,\alpha_2-1,\alpha_3+k)}(t)=p^1_k\alpha_1\alpha_2\lambda t+o\,(t),\ P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2+1,\alpha_3+k)}(t)=p^2_k\alpha_1\alpha_2\lambda t+o\,(t),$$
$$P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t)=1-\alpha_1\alpha_2\lambda t+o\,(t),\quad k=0,1,\ldots,$$

где $p^1_k\geqslant 0$, $p^2_k\geqslant 0$, $\sum_{k=0}^\infty p^1_k+\sum_{k=0}^\infty p^2_k=1$. Производящая функция переходных вероятностей $F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t;s_1,s_2,s_3)=\sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3=0}^\infty P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2}s_3^{\beta_3}$, $|s_1|\leqslant 1$, $|s_2|\leqslant 1$, $|s_3|\leqslant 1$, удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t;s_1,s_2,s_3)}{\partial t}=\lambda(h_1(s_3)s_1^2+h_2(s_3)s_2^2-s_1s_2)\frac{\partial^2 F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t;s_1,s_2,s_3)}{\partial s_1\partial s_2},$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(0;s_1,s_2,s_3)=s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3}$; введены производящие функции вероятностей скачков $h_1(s)=\sum_{k=0}^\infty p^1_ks^k$, $h_2(s)=\sum_{k=0}^\infty p^2_ks^k$. Положим $h_1(1)>0$, $h_2(1)>0$. Экспоненциальная (двойная) производящая функция переходных вероятностей $W_{(\beta_1,\beta_2)}(t;z_1,z_2;u)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_3=0}^\infty z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}/(\alpha_1!\alpha_2!)P^{(\alpha_1,\alpha_2,0)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)u^{\beta_3}$, $|u|\leqslant 1$, удовлетворяет первому (обратному) уравнению Колмогорова ([4], теорема 1)

$$\frac{\partial W_{(\beta_1,\beta_2)}(t;z_1,z_2;u)}{\partial t}=$$
$$\lambda z_1z_2\Big(h_1(u)\frac{\partial^2 W_{(\beta_1,\beta_2)}(t;z_1,z_2;u)}{\partial z_1^2}+h_2(u)\frac{\partial^2 W_{(\beta_1,\beta_2)}(t;z_1,z_2;u)}{\partial z_2^2}-\frac{\partial^2 W_{(\beta_1,\beta_2)}(t;z_1,z_2;u)}{\partial z_1\partial z_2}\Big),$$

с начальным условием $W_{(\beta_1,\beta_2)}(0;z_1,z_2;u)=z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}/(\beta_1!\beta_2!)$.

Состояния $\{(0,\alpha_2,\gamma_3),(\alpha_1,0,\gamma_3),\ \alpha_1,\alpha_2,\gamma_3=0,1,\ldots\}$ являются поглощающими; вероятности остановки процесса равны $q^{(\alpha_1,\alpha_2,0)}_{(0,\alpha_1+\alpha_2,\gamma_3)}=\lim_{t\to\infty}P^{(\alpha_1,\alpha_2,0)}_{(0,\alpha_1+\alpha_2,\gamma_3)}(t)$, $q^{(\alpha_1,\alpha_2,0)}_{(\alpha_1+\alpha_2,0,\gamma_3)}=\lim_{t\to\infty}P^{(\alpha_1,\alpha_2,0)}_{(\alpha_1+\alpha_2,0,\gamma_3)}(t)$, $\gamma_3=0,1,\ldots$ Для экспоненциальной производящей функции

$$w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,z_2;u)=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^\infty\frac{z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!}f^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}(u),\quad f^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}(u)=\sum_{\gamma_3=0}^\infty q^{(\alpha_1,\alpha_2,0)}_{(0,\alpha_1+\alpha_2,\gamma_3)}u^{\gamma_3},$$

имеем $w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,z_2;u)=\lim_{t\to\infty}W_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(t;z_1,z_2;u)$ и $w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,z_2;u)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$h_1(u)\frac{\partial^2 w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,z_2;u)}{\partial z_1^2}+h_2(u)\frac{\partial^2 w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,z_2;u)}{\partial z_2^2}-\frac{\partial^2 w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,z_2;u)}{\partial z_1\partial z_2}=0,$$

граничные условия $w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(0,z_2;u) = z_2^{\alpha_1+\alpha_2}/(\alpha_1+\alpha_2)!$, $w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,0;u) = 0$. Частное решение линейного уравнения гиперболического типа находится через характеристическое уравнение $h_1(u)(dz_2)^2 + dz_1dz_2 + h_2(u)(dz_1)^2 = 0$ [5],

$$w_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}(z_1,z_2;u) = \frac{\left(z_1 + z_2\frac{1+\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} - \left(z_1 + z_2\frac{1-\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)!\left(\left(\frac{1+\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} - \left(\frac{1-\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\right)}.$$

Раскладывая бином по z_1, z_2, получаем утверждение.

Теорема [2]. *Производящая функция вероятностей остановки равна,* $|u| \leqslant 1$,

$$f^2_{(\alpha_1,\alpha_2)}(u) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_2} - \left(\frac{1-\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_2}}{\left(\frac{1+\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} - \left(\frac{1-\sqrt{1-4h_1(u)h_2(u)}}{2h_2(u)}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad \alpha_1,\alpha_2 = 0,1,\ldots$$

Выражение для производящей функции $f^1_{(\alpha_1,\alpha_2)}(u) = \sum_{\gamma_3=0}^{\infty} q^{(\alpha_1,\alpha_2,0)}_{(\alpha_1+\alpha_2,0,\gamma_3)} u^{\gamma_3}$, $|u| \leqslant 1$, выводится аналогично. $f^1_{(0,0)}(u) = f^2_{(0,0)}(u) = 1$, $f^1_{(1,1)}(u) = h_1(u)$, $f^2_{(1,1)}(u) = h_2(u)$.

«Вложенная цепь Маркова» для процесса $\xi(t)$ представляет собой случайное блуждание на целых точках полуполосы. Найденная формула в частном случае $h_1(u) = pu$, $h_2(u) = qu$ ($p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$) совпадает с данной в [1], гл. XIV, § 4, формула (4.11), для случайного блуждания на отрезке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
2. *Самченко Т. В.* Вероятности остановки на границе случайного блуждания в полуполосе. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 114 с.
3. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
4. *Ланге А. М.* О распределении числа финальных частиц ветвящегося процесса с превращениями и парными взаимодействиями. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 4, с. 801–809.
5. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975, 128 с.