ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2016

Э. Л. Пресман (Москва, ЦЭМИ РАН). **Две леммы об эксцессивных функциях для общей одномерной диффузии.**

Рассматривается общая регулярная одномерная диффузия X_t $(t \geqslant 0)$, $X_0 = x$, принимающая значения в объединении открытого (или замкнутого, или полуоткрытого) интервала $I =]l, r[$, $-\infty \leqslant l < r \leqslant \infty$ и состояния e (более подробно см. [1], [2], [3]). Для общей регулярной диффузии определены моменты τ_y первого попадания в состояние y и марковское случайное время жизни $\zeta = \tau_e \leqslant +\infty$ (момент попадания в состояние e). Регулярность диффузии означает, что $\mathrm{P}_x[\tau_y < \zeta] > 0$ для любых $x, y \in int\, I$.

Для регулярной диффузии можно определить три функции:

1) строго возрастающую непрерывную справа $m(x)$, порождающую меру скорости $M(dx)$, так что $M(]a, b]) = m(b) - m(a)$;

2) строго возрастающую непрерывную $s(x)$ (шкала), порождающую меру $S(dx)$;

3) неубывающую непрерывную справа $k(x)$, порождающую меру убивания $K(dx)$.

И наоборот, если заданы три функции, обладающие указанными свойствами, то можно построить регулярную диффузию, которой эти функции соответствуют.

Если точка l (и/или r) принадлежит I, то для полного задания диффузии нужно задать значение мер M и K в соответствующей точке. При этом мера K может принимать и бесконечное значение, и в этом случае процесс после попадания в соответствующую точку мгновенно переходит в состояние e. Если мера M равна бесконечности в какой-либо граничной точке, то после попадания в эту точку, процесс навсегда в ней остается.

Если функции $m(x)$, $k(x)$ и $s(x)$ абсолютно непрерывны по мере Лебега, а функция $\frac{ds(x)}{dx}$ дифференцируема почти всюду, то получается диффузия Ито с инфинитезимальным оператором

$$Lf(x) = \frac{\sigma^2(x)}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + b(x)\frac{df(x)}{dx} - \rho(x)f(x),$$

где $\frac{\sigma^2(x)}{2} = \frac{1}{s'(x)m'(x)}$, $\quad b(x) = -\frac{s''(x)}{m'(x)(s'(x))^2}$, $\quad \rho(x) = \frac{k'(x)}{m'(x)}$.

Для $l < a < b < r$ положим $\tau_{ab} = \min(\tau_a, \tau_b)$. Для произвольной измеримой функции $g(x)$ положим

$$g_{ab}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x \in I, x \notin (a, b), \\ E_x g(X_{\tau_{ab}})\chi[\tau_{ab} < \zeta] & \text{при } x \in (a, b), \end{cases} \tag{1}$$

где $\chi[A] = 1$ на A и $\chi[A] = 0$ вне A. Если l (или r) не принадлежит I, то определение (1) остается без изменения для $a = l$ (соответственно $b = r$). Если l (или r) принадлежит I, то при определении функции $g_{lb}(x)$ (соответственно $g_{br}(x)$ нужно потребовать выполнение в граничной точке некоторых условий, зависящих от типа этой точки.

Функция $g_{ab}(x)$ обладает следующими свойствами. При всех $x, a \leqslant x < b$ у нее существует правая производная по функции $s(x)$, т.е. существует предел $\frac{d^+ g_{ab}}{ds(x)}(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{g_{ab}(x+h)-g_{ab}(x)}{s(x+h)-s(x)}$, и при $a < x < b$ выполняется равенство $\frac{d^+ g_{ab}}{ds(x)}(x) - \frac{d^+ g_{ab}}{ds(x)}(a) - \int_{(a,x]} g_{ab}(v)K(dv) \equiv 0$. Аналогичное свойство выполняется для левой производной $\frac{d^- g_{ab}}{ds(x)}(x)$.

Функция $g(x)$ называется эксцессивной для процесса X_t, если $E_x g(X_t)\chi[t < \zeta] \leqslant g(x)$ для любых $x \in I$, $t \geqslant 0$ и $\lim_{t\to 0} E_x g(X_t)\chi[t < \zeta] = g(x)$ для любых $x \in I$ (см. [3], с. 275).

В работе [4] показано, что функция $g(x)$ эксцессивна тогда и только тогда, когда у нее всюду существует правая и левая производная по $s(x)$ и функция $\frac{d^+ g}{ds(x)}(x) - \frac{d^+ g}{ds(x)}(a) - \int_{(a,x]} g(v)K(dv)$ не возрастает.

Будем говорить, что функция эксцессивна на интервале $[l, b]$, если она эксцессивна для процесса $X_{t\wedge\tau_b}$, где $X_0 \in I$, $X_0 \leqslant b$. Аналогично определяется эксцессивность на интервале $[a, b]$ и $[b, r]$.

В работе доказываются две леммы, которые оказываются полезными при построении цены игры в задачах оптимальной остановки.

Лемма 1. *Пусть функция $g(x)$ эксцессивна на интервале $[b, r]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Существует и при том единственное $b^*, b \leqslant b^* \leqslant r$, такое что функция $g_{lb^*}(x)$ является эксцессивной для процесса X_t и $g_{lb^*}(x) > g(x)$ при $b < x < b^*$.*

2) *При каждом фиксированном $x \in I$ функция $g_{lb'}(x)$ не убывает по b' при $b \leqslant b' \leqslant b^*$ и не возрастает по b' при $b^* \leqslant b' \leqslant r$.*

Положим $n(b') = \frac{d^+ g}{ds(x)}(b') - \frac{d^- g_{lb'}}{ds(x)}(b') - g(b')K(\{b'\})$.

3) *Существует такое $b^{**}, b^* \leqslant b^{**} \leqslant r$, что функция $n(b')$ убывает и положительна при $b \leqslant b' < b^*$, равна нулю при $b^* < b' < b^{**}$ и убывает и неположительна при $b^{**} \leqslant b' \leqslant r$.*

Из 3) следует, что либо $b^* = r$, либо $b^* = \inf\{b' : b' \geqslant b, n(b') \leqslant 0$. Это свойство является обобщением условия гладкого склеивания.

Лемма 2. *Пусть функция $g(x)$ эксцессивна на интервалах $[l, a]$ и $[b, r]$, где $l < a \leqslant b < r$. Тогда существуют и при том единственные $a^*, l \leqslant a^* \leqslant a$ и $b^*, b \leqslant b^* \leqslant r$, такие что функция $g_{a^*b^*}(x)$ является эксцессивной для процесса X_t и $g_{a^*b^*}(x) > g(x)$ при $a^* < x < a$ и $b < x < b^*$.*

Замечание. В условиях Леммы 2 можно сформулировать аналогичные утверждениям 2) и 3) Леммы 1 свойства монотонности, которые позволяют находить числа a^* и b^*, и выписать условия на a^* и b^*, являющиеся аналогами условия гладкого склеивания.

Приведенные результаты являются обобщением соответствующих результатов из работ [5] и [6], в которых рассматривался случай такого обобщения диффузии Ито для которого имеется конечное число точек частичного отражения (т.е. точек, в которых правая производная от функции $s(x)$ отличается от левой производной). Отметим, что результат аналогичный утверждению 2 Леммы 1 для диффузии Ито и гладкой функции $g(x)$ был получен в работе [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-06-03723).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ито К.*, *Маккин. Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.
2. *Бородин А. Н.*, *Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. СПб.: Лань, 2000.
3. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Пресман Э. Л.*, *Сластников А. Д.* О пороговых стратегиях задаче оптимальной остановки общей регулярной одномерной диффузии. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 5
5. *Presman E.* Solution of the optimal stopping problem for one-dimensional diffusion based on a modification of the payoff function. — In: Prokhorov and Contemporary Probability Theory. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2013, v. 33, p. 371—403.
6. *Presman E.* Solution of optimal stopping problem based on a modification of payoff function, Inspired by Finance. Musela Festshrift, Springer Verlag, 2014.
7. *Аркин В. И.*, *Сластников А. Д.* Пороговые правила остановки диффузионных процессов и задача Стефана. — Доклады Академии наук, 2012, т. 446, №3, с. 247–250.