ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2016

В. О. Миронкин (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ). **Об особенностях строения графа степени случайного отображения.**

В работе продолжены исследования вероятностных свойств и характеристик степени случайного равновероятного отображения [2–5].

Изучается класс отображений $\{f^k : S \to S, |S| = N\}, k \in \mathbb{N},$ построенный на основе класса случайных равновероятных отображений $\mathfrak{J}\{f : S \to S, |S| = N\}$ (см. [1, 6–9]). С учетом [2] вычислены значения $\mathbf{P}\{\tau_N^{(k)}(x_0) = z\}$, $\mathbf{E}\tau_N^{(k)}(x_0)$ и $\mathbf{D}\tau_N^{(k)}(x_0)$ для различных $k \in \mathbb{N}$, составлены таблицы и построены графики, позволившие сделать вывод о монотонном возрастании вероятности $\mathbf{P}\{\tau_N^{(k)}(x_0) = z\}$ с ростом аргумента z от 1 до некоторого значения, близкого к $\sqrt{N/k}$, и дальнейшем ее убывании до нуля. На основе выражения для $\mathbf{P}\{\tau_N^{(k)}(x_0) = z\}$, полученного в [2], сформулирован ряд следствий.

Следствие 1. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и произвольного* $x_0 \in S$

$$\mathbf{E}\,\tau_N^{(k)}(x_0) = \frac{1}{N}\sum_{z=1}^{N} z \sum_{s=0}^{z-1} \sum_{t=\max(0,(s-1)k+1)}^{\min(N-1,sk)} \sum_{\substack{l=1, l|(z-s)k\\ l\nmid pk, 1\leqslant p<z-s}}^{N-t} \prod_{i=1}^{t+l-1}\left(1-\frac{i}{N}\right).$$

Следствие 2. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и произвольного* $x_0 \in S$

$$\mathbf{D}\tau_N^{(k)}(x_0) = \frac{1}{N}\sum_{z=1}^{[\sqrt{N}]} z^2 \sum_{s=0}^{z-1} \sum_{t=\max(0,(s-1)k+1)}^{\min(N-1,sk)} \sum_{\substack{l=1, l|(z-s)k\\ l\nmid pk, 1\leqslant p<z-s}}^{N-t} \prod_{i=1}^{t+l-1}\left(1-\frac{i}{N}\right)$$

$$-\frac{1}{N}^2\left(\sum_{z=1}^{N} z \sum_{s=0}^{z-1} \sum_{t=\max(0,(s-1)k+1)}^{\min(N-1,sk)} \sum_{\substack{l=1, l|(z-s)k\\ l\nmid pk, 1\leqslant p<z-s}}^{N-t} \prod_{i=1}^{t+l-1}\left(1-\frac{i}{N}\right)\right)^2, \quad z \in \overline{1,N}.$$

$$\mathbf{D}\,\tau_N^{(k)}(x_0) = 0, \quad z < 1 \quad \text{или} \quad z > N.$$

Из полученных таблиц для $\mathbf{E}\,\tau_N^{(k)}(x_0)$ и $\mathbf{D}\,\tau_N^{(k)}(x_0)$ сделано предположение о стабилизации множеств значений $\mathbf{E}\,\tau_N^{(k)}(x_0)$ и $\mathbf{D}\,\tau_N^{(k)}(x_0)$ с ростом k, так как при $k \geqslant N-1$ обе характеристики определяются только множеством циклов в $G^{(k)}$, где $G^{(k)}$ — граф отображения f^k. На основе проведенных вычислений сформулирована гипотеза о периодичности последовательностей $\{\mathbf{E}\,\tau_N^{(k)}(x_0)\}, \{\mathbf{D}\,\tau_N^{(k)}(x_0)\}, k = N-1, N, \ldots,$ для произвольного $x_0 \in S$ при фиксированном N.

Предложение 1. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$ *— фиксировано. Тогда для произвольного* $x_0 \in S$ *последовательности* $\{\mathbf{E}\,\tau_N^{(k)}(x_0)\}$ *и* $\{\mathbf{D}\,\tau_N^{(k)}(x_0)\}, k = N-1, N, \ldots,$ *имеют период*

$$T = \text{НОК}(1, \cdots, N).$$

Обозначим $\nu_z^{(k)}$ случайную величину, равную числу вершин случайного графа $G^{(k)}$, длина отрезка апериодичности которых равна $z \in \overline{1,N}$.

Следствие 3. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и* $z \in \overline{1,N}$

$$\mathbf{E}\,\nu_z^{(k)} = \sum_{s=0}^{z-1} \sum_{t=\max(0,(s-1)k+1)}^{\min(N-1,sk)} \sum_{\substack{l=1,l|(z-s)k \\ l\nmid pk,1\leqslant p<z-s}}^{N-t} \prod_{i=1}^{t+l-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr).$$

Следствие 4. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и* $z \in \overline{1,N}$

$$\mathbf{D}\nu_z^{(k)} = \sum_{s=0}^{z-1} \sum_{t=\max(0,(s-1)k+1)}^{\min(N-1,sk)} \sum_{\substack{l=1,l|(z-s)k \\ l\nmid pk,1\leqslant p<z-s}}^{N-t} \prod_{i=1}^{t+l-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)$$

$$+\sum_{s=1}^{z-1} \sum_{\substack{l=1,l|sk \\ l\nmid pk,1\leqslant p<s}}^{N-M_{z,k}(2,s)-1} \sum_{t_1=M_{z,k}(2,s)}^{m_{z,k}(l+1,s)} \sum_{j=1}^{t_1-1} \prod_{i=2}^{l+2t_1-j-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)$$

$$+\sum_{s=1}^{z} \sum_{\substack{l=1,l|sk \\ l\nmid pk,1\leqslant p<s}}^{N-2M_{z,k}(0,s)} (l-\delta_{s,z}) \sum_{t_1=M_{z,k}(0,s)}^{m_{z,k}(l+M_{z,k}(0,s),s)} \sum_{t_2=M_{z,k}(0,s)}^{m_{z,k}(l+t_1,s)} \prod_{i=1}^{l+t_1+t_2-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)$$

$$+2\sum_{s=1}^{z-1} \sum_{\substack{l=1,l|sk \\ l\nmid pk,1\leqslant p<s}}^{N-M_{z,k}(2,s)} \sum_{t_1=M_{z,k}(2,s)}^{m_{z,k}(l,s)} \sum_{t_2=M_{z,k}(0,s)}^{t_1-1} \sum_{j=1}^{t_2} \prod_{i=1}^{l+t_1+t_2-j-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)$$

$$+\delta_{z,z}^{(N)} \sum_{s_1=1}^{z} \sum_{s_2=1}^{z} \sum_{\substack{l_1=1,l_1|s_1k \\ l_1\nmid pk,1\leqslant p<s_1}}^{N-1-2M_{z,k}(0,s)} \sum_{t_1=M_{z,k}(0,s_1)}^{m_{z,k}(l_1+M_{z,k}(0,s_2)+1,s_1)}$$

$$\times \sum_{\substack{l_2=1,l_2|s_2k \\ l_2\nmid pk,1\leqslant p<s_2}}^{N-l_1-t_1-M_{z,k}(0,s_2)} \sum_{t_1=M_{z,k}(0,s_1)}^{m_{z,k}(l_1+M_{z,k}(0,s_2)+1,s_1)} \prod_{i=1}^{l_1+l_2+t_1+t_2-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)$$

$$-\Biggl(\sum_{s=0}^{z-1} \sum_{t=\max(0,(s-1)k+1)}^{\min(N-1,sk)} \sum_{\substack{l=1,l|(z-s)k \\ l\nmid pk,1\leqslant p<z-s}}^{N-t} \prod_{i=1}^{t+l-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr)\Biggr)^2.$$

Обозначим $C^{(k)}$ множество циклических вершин графа $G^{(k)}$. Заметим, что при переходе от графа $G^{(1)}$ к графу $G^{(k)}, k>1$, множество циклических вершин остается неизменным:

$$C^{(k)} = C^{(k-1)} = \dots = C^{(1)}.$$

Однако распределение числа циклических вершин по компонентам графа изменяется в зависимости от величины k.

Обозначим $C^{(k)}(l)$ множество вершин графа $G^{(k)}$, лежащих на циклах длины $l \in \overline{1,N}$. Из определения $H_t^{(k)}(l)$ [3] следует, что $C^{(k)}(l) = H_0^{(k)}(l)$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда множество* $C^{(1)}(l)$ *графа* $G^{(1)}$ *переходит во множество* $C^{(k)}(\widetilde{l})$ *графа* $G^{(k)}$, *где* $\widetilde{l} = \dfrac{l}{\text{НОД}(l,k)}$.

Следствие 5. *Свойство принадлежать циклу заданной длины является инвариантом при переходе от графа* $G^{(1)}$ *к графу* $G^{(k)}$ *для вершин, лежащих на циклах, длины которых взаимопросты с* k.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in S$

$$\mathbf{P}\Bigl\{x_0 \in C^{(k)}(l)\Bigr\} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1,m|kl \\ m\nmid kq,1\leqslant q<l}}^{N} \prod_{i=1}^{m-1} \Bigl(1-\frac{i}{N}\Bigr).$$

Обозначим $\mu_t^{(k)}$, $l \in \overline{1,N}$, случайную величину, равную числу вершин случайного графа $G^{(k)}$, лежащих в $H_t^{(k)}(l)$.

Следствие 6. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\,\mu_0^{(k)}(l) = \sum_{\substack{m=1, m|kl\\ m\nmid kq, 1\leqslant q<l}}^{N} \prod_{j=1}^{m-1} \Big(1 - \frac{j}{N}\Big).$$

Обозначим $\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, \alpha = \beta,\\ 0, \alpha \neq \beta.\end{cases}$

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольных* $x_0, y_0 \in S\colon x_0 \neq y_0$

$$\mathbf{P}\Big\{x_0 \in C^{(k)}(l_1),\, y_0 \in C^{(k)}(l_2)\Big\}$$

$$= \frac{\delta_{l_1,l_2}}{N^2} \sum_{\substack{m=2, m|kl_1\\ m\nmid kq, 1\leqslant q<l_1}}^{N} (m-1) \prod_{i=2}^{m-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big) + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{m_1=1, m_1|kl_1\\ m_1\nmid kq, 1\leqslant q<l_1}}^{N-1} \sum_{\substack{m_2=1, m_2|kl_2\\ m_2\nmid kp, 1\leqslant p<l_2}}^{N-m_1} \prod_{i=2}^{m_1+m_2-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big).$$

Следствие 7. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\mathbf{D}\,\mu_0^{(k)}(l) = \sum_{\substack{m=1, m|kl\\ m\nmid kq, 1\leqslant q<l}}^{N} \prod_{i=1}^{m-1} \Big(1 - \frac{j}{N}\Big) + \sum_{\substack{m=2, m|kl\\ m\nmid kq, 1\leqslant q<l}}^{N} (m-1) \prod_{i=1}^{m-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big)$$

$$+ \sum_{\substack{m_1=1, m_1|kl_1\\ m_1\nmid kq, 1\leqslant q<l_1}}^{N-1} \sum_{\substack{m_2=1, m_2|kl_2\\ m_2\nmid kp, 1\leqslant p<l_2}}^{N-m_1} \prod_{i=1}^{m_1+m_2-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big) - \Bigg(\sum_{\substack{m=1, m|kl\\ m\nmid kq, 1\leqslant q<l}}^{N} \prod_{i=1}^{m-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big)\Bigg)^2.$$

Теорема 4. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольных* $x_0, y_0 \in S : x_0 \neq y_0$

$$1.\ \mathbf{P}\Big\{x_0 \in H_t^{(k)}(l_1),\, y_0 \in C^{(k)}(l_2)\Big\} = \frac{1}{N^2} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{\substack{m_1=1, m_1|kl_1\\ m_1\nmid kq, 1\leqslant q<l_1}}^{N-tk+p-1} \sum_{\substack{m_2=1, m_2|kl_2\\ m_2\nmid kq, 1\leqslant p<l_2}}^{N-tk+p-m_1}$$

$$\times\Bigg(\delta_{l_1,l_2}\delta_{m_1,m_2} m_1 \prod_{i=2}^{tk-p+m_1-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big) + \prod_{i=2}^{tk-p+m_1+m_2-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big)\Bigg);$$

$$2.\ \mathbf{P}\Big\{x_0 \in H_t^{(k)}(l_1),\, y_0 \in H_s^{(k)}(l_2)\Big\} = \frac{\delta_{l_1,l_2}}{N^2} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{d=0}^{k-1} \sum_{\substack{m_1=1, m_1|kl_1\\ m_1\nmid kq, 1\leqslant q<l_1}}^{N-(t+s)k+p+d-1}$$

$$\times \sum_{\substack{m_2=1, m_2|kl_2\\ m_2\nmid kq, 1\leqslant p<l_2}}^{N-(t+s)k+p+d-m_1} \delta_{m_1,m_2} \sum_{j=1}^{\min(tk-p, sk-d)-\delta_{tk-p,sk-d}} \prod_{i=2}^{(t+s)k-p-d-j+m_1-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big)$$

$$+ \frac{\delta_{l_1,l_2}}{N^2} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{d=0}^{k-1} \sum_{\substack{m_1=1, m_1|kl_1\\ m_1\nmid kq, 1\leqslant q<l_1}}^{N-(t+s)k+p+d-1} \sum_{\substack{m_2=1, m_2|kl_2\\ m_2\nmid kq, 1\leqslant p<l_2}}^{N-(t+s)k+p+d-m_1} \delta_{m_1,m_2} m_1 \prod_{i=2}^{(t+s)k-p-d+m_1-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big)$$

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{d=0}^{k-1} \sum_{\substack{m_1=1, m_1|kl_1\\ m_1\nmid kq, 1\leqslant q<l_1}}^{N-(t+s)k+p+d-1} \sum_{\substack{m_2=1, m_2|kl_2\\ m_2\nmid kq, 1\leqslant p<l_2}}^{N-(t+s)k+p+d-m_1} \prod_{i=2}^{(t+s)k-p-d+m_1+m_2-1} \Big(1 - \frac{i}{N}\Big),$$

где $t \geqslant 1$, $s \geqslant 1$.

О п р е д е л е н и е. Назовем t-м *слоем* с $m \geqslant 0$ *прообразами*, $t \geqslant 1$, в графе $G^{(k)}$ множество вершин $H^{(k)}_{t,m} = \{x_0 \in S : \alpha^{(k)}_N(x) = t,\ |\{f^{-k}(x)\}| = m\}$.

О п р е д е л е н и е. Назовем t-м слоем с числом прообразов не меньшим, чем $m \geqslant 0, t \geqslant 1$, в графе $G^{(k)}$ множество вершин $\overline{H}^{(k)}_{t,m} = \{x_0 \in S : \alpha^{(k)}_N(x) = t,\ |\{f^{-k}(x)\}| \geqslant m\}$.

Теорема 5. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in S$ *при* $t \geqslant 1$ *и* $m_k \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\left\{x_0 \in \overline{H}^{(k)}_{t,m}\right\} = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{k-1}\ \sum_{m_{k-1}=1}^{\min(m_k, N-tk+p-k+1-m_k)}$$

$$\dots \sum_{m_1=1}^{\min(m_2, N-tk+p-1-\sum_{q=2}^{k} m_q)} \left(\prod_{i=1}^{k} D^{m_{i-1}}_{m_i}\right) \sum_{l=1}^{N-tk+p-\sum_{q=1}^{k} m_q}\ \prod_{j=1}^{tk+p+l-1+\sum_{q=1}^{k} m_q} \left(1-\frac{i}{N}\right),$$

где $D^{m_{i-1}}_{m_i} = \sum_{k-0}^{m_{i-1}-1} (-1)^k C^k_{m_{i-1}} (m_{i-1}-k)^{m_i}$.

Через $\mu^{(k)}_{t,m}$, $t \geqslant 1$, обозначим случайную величину, равную числу вершин множества $H^{(k)}_{t,m}$ в случайном графе $G^{(k)}$, а через $\overline{\mu}^{(k)}_{t,m}$, $t \geqslant 1$, — случайную величину, равную числу вершин множества $\overline{H}^{(k)}_{t,m}$.

Следствие 8. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in S$ *при* $t \geqslant 1$ *и* $m_k \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\,\overline{\mu}^{(k)}_{t,m_k} = \sum_{p=0}^{k-1}\ \sum_{m_{k-1}=1}^{\min(m_k, N-tk+p-k+1-m_k)}$$

$$\dots \sum_{m_1=1}^{\min(m_2, N-tk+p-1-\sum_{q=2}^{k} m_q)} \left(\prod_{i=2}^{k} D^{m_{i-1}}_{m_i}\right) \sum_{l=1}^{N-tk+p-\sum_{q=1}^{k} m_q}\ \prod_{j=1}^{tk-p+l-1+\sum_{q=1}^{k} m_q} \left(1-\frac{j}{N}\right).$$

Следствие 9. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in S$ *при* $t \geqslant 1$ *и* $m_k \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\left\{x_0 \in H^{(k)}_{t,m_k}\right\} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\nu} \sum_{p=0}^{k-1}\ \sum_{m_{k-1}=1}^{\min(m_k+\nu, N-tk+p-k+1-m_k-\nu)}$$

$$\dots \sum_{m_1=1}^{\min(m_2, N-tk+p-1-\nu-\sum_{q=2}^{k} m_q)} \left(D^{m_{k-1}}_{m_k+\nu} \prod_{i=2}^{k-1} D^{m_{i-1}}_{m_i}\right) \sum_{l=1}^{N-tk+p-\nu-\sum_{q=1}^{k} m_q}$$

$$\times \prod_{j=1}^{tk+p+l-1+\nu+\sum_{q=1}^{k} m_q} \left(1-\frac{j}{N}\right).$$

Следствие 10. *Пусть* $f \in \mathfrak{J}$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in S$ *при* $t \geqslant 1$ *и* $m_k \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\mu^{(k)}_{t,m_k} = \sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\nu} \sum_{p=0}^{k-1}\ \sum_{m_{k-1}=1}^{\min(m_k+\nu, N-tk+p-k+1-m_k-\nu)}$$

$$\dots \sum_{m_1=1}^{\min(m_2, N-tk+p-1-\nu-\sum_{q=2}^{k} m_q)} \left(D^{m_{k-1}}_{m_k+\nu} \prod_{i=2}^{k-1} D^{m_{i-1}}_{m_i}\right) \sum_{l=1}^{N-tk+p-\nu-\sum_{q=1}^{k} m_q}$$

$$\times \prod_{j=1}^{tk+p+l-1+\nu+\sum_{q=1}^{k} m_q} \left(1-\frac{j}{N}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984.
2. *Миронкин В. О.* Исследование свойств и характеристик степени случайного отображения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 1, с. 70–73.
3. *Миронкин В. О.* Вероятностные характеристики слоев в графе случайного отображения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 1, с. 80–82.
4. *Миронкин В. О.* Вероятность коллизии двух случайных точек для степени случайного отображения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 4, с. 403–409.
5. *Миронкин В. О.* Совместная вероятность длин отрезков апериодичности двух вершин в графе степени случайного отображения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 4, с. 482–484.
6. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.
7. *Степанов В. Е.* О распределении числа вершин в слоях случайного дерева. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. XIV, в. 1, с. 64–77.
8. *Flajolet Ph.*, *Odlyzko A. M.* Random mapping statistics. — In: Advances in Cryptology. Proceedings of EUROCRYPT'89 (Houtalen, Belgium, April 1989.)/ Ed. by J-J. Quisquater, J. Vandewalle. Berlin etc.: Springer, 1990, p. 329–354. (Ser Lect. Notes Comput. Sci. V. 434.)
9. *Harris B.* Probability distributions related to random mapping. — Ann. Math. Statist., 1960, v. 31, №4, p. 1045–1062.