Е. В. К у т ы р е в а (Москва, ТВП). **К вопросу о доле нулевых элементов в треугольнике Паскаля над произвольным конечным полем.**

Рассмотрим аналог T_s треугольника Паскаля, состоящий из s строк элементов произвольного конечного поля $\mathbf{GF}(q)$, $q = p^l$. В этом треугольнике элементы i -й строки $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_i^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s-1$, получаются из элементов $(i+1)$ -й строки $x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dots, x_{i+1}^{(i+1)}$ по следующему правилу: $x_j^{(i)} = bx_j^{(i+1)} + dx_{j+1}^{(i+1)}$, $j = 1, 2, \dots, i$, $+$ означает операцию сложения в поле $\mathbf{GF}(q)$, а $b, d \in \mathbf{GF}(q)^*$. Последняя s -я строка $x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_s^{(s)}$ может быть произвольной.

Через s_0 обозначим размер максимального треугольника T_{s_0} , состоящего целиком из нулевых элементов и содержащегося в треугольнике T_s . В общем случае нулевых треугольников T_{s_0} в треугольнике T_s с максимально возможным значением s_0 может быть несколько. Каждая строка T_{s_0} состоит из подряд идущих элементов одной из строк T_s (см. [1]).

Рассмотрим три возможных варианта расположения треугольника T_{s_0} в треугольнике T_s :

- треугольник T_{s_0} находится внутри треугольника T_s (не касается его сторон, т.е. элементы сторон треугольника T_s не являются одновременно элементами какой либо стороны треугольника T_{s_0});
- треугольник T_{s_0} касается одной стороны треугольника T_s ;
- треугольник T_{s_0} находится в вершине треугольника T_s (касается двух его сторон).

В третьем случае рассмотрим трапецию D , состоящую из строк треугольника T_s , не принадлежащих треугольнику T_{s_0} . Число строк этой трапеции обозначим через R . Строку трапеции D , состоящую из s_0+i элементов будем считать $(i-1)$ -й строкой трапеции, т.е. строку, следующую за основанием треугольника T_{s_0} , будем считать 0-й строкой трапеции D .

Разобьем строки трапеции D на $\lceil \log_p R \rceil + 1$ групп по $(p-1)p^{j-1}$ строк, где j — номер группы, $j \in \{1, 2, \dots, \lceil \log_p R \rceil\}$. Группа с номером 0 состоит из 0-й строки трапеции Tr_1 . Последняя группа может быть неполной. Обозначим элемент $-bd^{-1}$ через y . Пусть порядок элемента y равен c .

Утверждение 1. Период i -й строки трапеции D равен $cp^{\lceil \log_p (i+1) \rceil}$.

Через $x_k^{(j)}$ обозначим k -й элемент j -й строки трапеции D , $j = 0, 1, \dots, R-1$, $k = 0, 1, \dots, s_0 + j$.

Пусть $x_0^{(0)} \neq 0$, $x_0^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, \dots, R-1$.

Тогда верны следующие утверждения:

Утверждение 2. Пусть p -ичная запись номера j строки из i -й группы строк трапеции D содержит в точности l_k цифр k , $k = 1, 2, \dots, p-1$. Тогда на периоде j -й строки трапеции равно $cp^i - cp^{i-l} \prod_{k=1, l_k \neq 0}^{p-1} (p-k)^{l_k}$ нулевых элементов.

Утверждение 3. Доля нулевых элементов на периоде в строках трапеции D с номерами $0, 1, \dots, r-1$ не превышает долю нулевых элементов на периоде в строках этой трапеции с номерами $R-r, R-r+1, \dots, R-1$.

Утверждение 4. Существует взаимнооднозначное соответствие строк трапеции D с номерами из множеств $\{0, 1, \dots, r-1\}$ и $\{R-r, R-r+1, \dots, R-1\}$, такое, что для любой пары соответствующих друг другу строк с номерами j из первого множества и $j^{(R)}$ из второго при выполнении $x_k^{(j)} = 0$ выполняется $x_k^{(j^{(R)})} = 0$.

Утверждение 5. Для достаточно большого значения s_0 и любого фиксированного значения $r < R$ доля нулевых элементов в строках трапеции D с номерами $0, 1, \dots, r-1$ не превышает долю нулевых элементов в строках трапеции с номерами $R-r, R-r+1, \dots, R-1$.

Утверждение 6. Для фиксированных значений s и s_0 доля нулевых элементов в треугольнике T_s максимальна в случае, когда треугольник T_{s_0} расположен в его вершине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальшев Ф. М., Кутырева Е. В. Об одном свойстве булевых аналогов треугольника Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 2, с. 245–246.
2. Кутырева Е. В. О числе ненулевых элементов треугольника Паскаля над конечным полем. — В сб.: Математика и безопасность информационных технологий. Материалы конференции МГУ 28–29 октября 2004 г. М.: МЦНМО, 2005, с. 170–171.