ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

А. В. Булинский (Москва, МФТИ). **О мерах классических и квантовых корреляций в составных системах.**

Квантовая теория информации, возникшая на стыке квантовой механики и классической теории информации, особенно интенсивно развивается в нынешнем столетии. Многие из ее важных проблем связаны с рассмотрением составных систем, состоящих минимум из двух подсистем (частей), вовлекающим анализ корреляций, скрытых в многочастичных квантовых состояниях. Эти состояния традиционно представляются операторами плотности на тензорных произведениях гильбертовых пространств, и ранее изучались, в основном, конечномерные пространства (системы), см. [1],[2]. Попрежнему активно исследуется и оценивается *сцепленность* (entanglement) составных состояний (в противовес *сепарабельности* комбинаций простых тензоров) как ресурс превосходства квантовых устройств и процедур над классическими аналогами в задачах хранения, передачи и обработки информации. Также было установлено, что специфические корреляции, присущие квантовым состояниям и обеспечивающие возможность упомянутых преимуществ, не сводятся лишь к сцепленности. Возникла концепция квантового разлада (quantum discord) и другие сходные понятия для охвата всех возможных неклассических корреляций. Для их количественного описания используются различные взаимосвязанные энтропийные или информационные характеристики, в частности, учитывающие изменения информации, связанные с измерением и приготовлением состояний [2].

Корреляции состояний конечномерной n-частичной квантовой системы $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_{\mathrm{n}}$ описываются различными энтропийными мерами: квантовая взаимная информация, квантовая условная энтропия, квантовая относительная энтропия, условная взаимная информация, топологическая энтропия сцепленности и т. п. Многие из них вводятся как линейные комбинации маргинальных энтропий $H(\omega_{\mathcal{S}_j})$ частичных состояний, соответствующих подсистемам $\mathcal{S}_j$ в $\mathcal{A}$. При этом, например, 3-х частичная система $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 \equiv \mathcal{ABC}$ может разделяться на две подсистемы: $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{C}$, или $\mathcal{A}$ и $\mathcal{BC}$, или $\mathcal{B}$ и $\mathcal{AC}$. Для состояния ω (т. е. оператора плотности — неотрицательного оператора с единичным следом в гильбертовом пространстве системы) его энтропия фон Неймана $H(\omega) = -\mathrm{Tr}(\omega \mathrm{Log} \omega)$ выступает как аналог классической энтропии Шеннона для распределения, а относительная энтропия состояний ρ и σ есть $D(\rho \| \sigma) = \mathrm{Tr}(\rho(\mathrm{Log}\rho - \mathrm{Log}\sigma))$, если $\mathrm{supp}\, \rho \subseteq \mathrm{supp}\, \sigma$, и $+\infty$ иначе. Развитый М. Е. Широковым подход [3] позволяет ввести бесконечномерные обобщения целого ряда корреляционных мер вида $\sum_j c_j H(\omega_{\mathcal{S}_j})$, свободные от неопределенностей $\infty - \infty$, для состояний на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Мы продолжаем начатое нами в [4] изучение обобщений результатов для конечномерного случая в разных направлениях: не только на алгебру $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в бесконечномерном случае, но и на произвольные (в частности, инъективные) алгебры фон Неймана [5], причем с возможностью замены в информационных мерах базовой энтропии фон Неймана на различные обобщения квантовых аналогов энтропий Реньи [6].

В этой связи приведем некоторые результаты, относящиеся к двух- и трехчастичным состояниям. Начав с обобщения конечномерного рассмотрения [7], отметим, что в силу соответствия Чоя–Ямиолковского свойства квантовых операций (каналов) выражаются через свойства сопоставляемых каналам двухчастичных состояний [8].

Предложение 1. *По аналогии с конечномерным случаем для состояний на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, имеет место разделение корреляций двухчастичных состояний на классические и квантовые.*

Предложение 2. *Для точных нормальных состояний на инъективных алгебрах фон Неймана $\mathcal{M}$ также справедливо Предложение* 1.

Равенство нулю условной взаимной информации для трехчастичного состояния имеет красивую интерпретацию в терминах свойства состояния быть короткой квантовой марковской цепью и означает существование определенного канала, восстанавливающего состояние по его маргиналу. Это тесно связано с обращением в равенство некоторого неравенства обработки информации, т. е. с сохранением некоторой монотонной информационной меры типа относительной энтропии двух состояний, не возрастающей под действием на них квантовой операции. Такой результат был обобщен в [9] на случай приближенного равенства. Проведенный в [10] анализ точного равенства для конечномерных пространств допускает бесконечномерное обобщение. Понятие α — слоеной относительной квантовой расходимости Реньи $\widetilde{\mathrm{D}}_\alpha$ распространяется на пары состояний алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ в сепарабельном $\mathcal{H}$ при $\alpha > 1$. Кроме того, устанавливается

Теорема. *Действие канала на состояния ρ, σ не увеличивает $\widetilde{\mathrm{D}}_\alpha(\rho\|\sigma)$. Сохранение каналом меры $\widetilde{\mathrm{D}}_\alpha(\rho\|\sigma)$ также означает его достаточность для пары ρ, σ, т. е. наличие обращающего канала, восстанавливающего эти состояния.*

Свойства каналов, восстанавливающих наборы состояний на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, изучались в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nielsen M. A.*, *Chuang I. L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000
2. *Холево А. С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010
3. *Shirokov M. E.* Measures of quantum correlations in infinite-dimensional systems. arXiv: 2015, 1506.06377
4. *Булинский А. В.* Обобщение некоторых энтропийно-информационных характеристик для состояний на алгебрах фон Неймана. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 5, с. 121–122
5. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras III. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Berlin, Springer Verlag, 2010, v. 127.
6. *Tomamichel M.*, *Berta M.*, *Hayashi M.* Relating different quantum generalizations of the conditional Rényi entropy. — J. Math. Phys., 2014, v. 55, 082206.
7. *Zhang L.*, *Wu J.* On conjectures of classical and quantum correlations in bipartite states. — J. Phys. A: Math. Theor., 2012, v. 45, 02531.
8. *Holevo A. S.* On the Choi-Jamiolkovski correspondence in infinite dimensions. — J. Math. Phys., 2011, v. 52, 042202.
9. *Fawzi O.*, *Renner R.* Quantum conditional mutual information and approximate Markov chains. — Commun. Math. Phys., 2015, v. 340, №. 2, p. 575–611
10. *Datta N.*, *Wilde M. M.* Quantum Markov chains, sufficiency of quantum channels and Rényi information measures. — J. Phys. A: Math. Theor., 2015, v. 48, 505301.
11. *Shirokov M. E.* Reversibility of a quantum channel: general conditions and their application to Bosonic linear channels. — J. Math. Phys., 2013, v. 54, 112201.