

**А. В. Н е к л ю д о в** (Москва, МГТУ им. Н.Э.Баумана). **Колеблемость решений эллиптических уравнений второго порядка в цилиндре.**

Известны различные обобщения утверждения о колеблемости (отсутствии положительных решений) обыкновенного дифференциального уравнения  $u'' + au = 0$ ,  $a = \text{const} > 0$ , на полупрямой для переменного коэффициента  $a = a(x)$ . Наиболее известные из них [1] гарантируют колеблемость при выполнении условий  $\int_{x_0}^{\infty} a(x) dx = \infty$  или  $a(x) \geq Cx^{-2}$ ,  $x \geq x_0 > 0$ ,  $C > 1/4$ . Для линейных и полулинейных уравнений с частными производными в цилиндрических областях

$$Lu + a(x)u^{\sigma} = 0, \quad a > 0, \quad \sigma = \text{const} \geq 1, \quad (1)$$

аналогичный вопрос изучался [2]–[4] для случая  $a = \text{const} > 0$  и при следующих ограничениях на коэффициенты равномерно эллиптического оператора  $Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}$ :  $a_{11} = 1$ ,  $a_{i1} = 0$ ,  $i = 2, \dots, n$  (здесь и далее ось цилиндра параллельна оси  $x_1$ ). Рассматривались решения, удовлетворяющие однородному граничному условию Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad (2)$$

на боковой части границы цилиндра,  $\nu$  — конормаль к границе. В настоящей работе изучаются условия отсутствия положительных решений уравнений вида (1), а также уравнений с нелинейностью более общего вида

$$Lu + a(x, u) = 0, \quad a(x, u) > 0.$$

На измеримые коэффициенты  $a_{ij}$  уравнения не накладываются никакие ограничения кроме условия равномерной эллиптичности. Рассматриваются обобщенные решения в смысле С.Л.Соболева. Ограниченная область, лежащая в основании  $\hat{\Omega}$   $n$ -мерного полубесконечного цилиндра  $\Omega = (0, +\infty) \times \hat{\Omega}$ , предполагается имеющей липшицеву границу.

Справедливы следующие утверждения, обобщающие результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теорема 1.** Пусть  $\sigma \geq 1$ ,  $a(x) \geq 0$  в  $\Omega$ ,  $\int_{\Omega} a(x) dx = \infty$ . Тогда не существует положительных решений задачи (1)–(2) в  $\Omega$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\sigma = 1$ ,  $a(x) \geq C_0 x_1^{-2}$  при  $x_1 > x_1^{(0)} > 0$ , где постоянная  $C_0 > 0$  зависит от области  $\hat{\Omega}$  и констант эллиптичности уравнения (1). Тогда не существует положительных решений задачи (1)–(2) в  $\Omega$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\sigma > 1$ ,  $a(x) \geq c x_1^{-2}$  при  $x_1 > x_1^{(0)} > 0$ ,  $c = \text{const} > 0$ . Тогда не существует положительных решений задачи (1)–(2) в  $\Omega$ .

**Теорема 4.** Пусть  $a(x, u)$  — измеримая локально ограниченная функция,  $a(x, u) \geq 0$  при  $u > 0$ ,  $x_1 > x_1^{(0)} = \text{const} > 0$ , и выполнено условие

$$a(x, u) \geq \varphi(x_1)\psi(u),$$

где  $\varphi, \psi$  — измеримые функции,  $\varphi \geq 0$ ,

$$\int_{t_0}^{\infty} t\varphi(t) dt = \infty,$$

$\psi(u) > 0$  — выпуклая неубывающая при  $u > 0$  функция,  $\psi(u) \geq c_0 = \text{const} > 0$  при  $u \geq u_0 = \text{const} > 0$ ,

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} < \infty.$$

Тогда не существует положительных решений задачи (3)–(2) в  $\Omega$ .

Примером уравнения, для которого справедлива теорема 4, является уравнение вида (3) с функцией

$$a(x, u) = \frac{\max\{c_1, u \ln^{\sigma_1} u\}}{x_1^2 \ln^{\sigma_2} x_1}, \quad \sigma_1 > 1, \quad \sigma_2 \leq 1, \quad c_1 > 0.$$

Доказательства основаны на полученном соотношении между средним значением решения по сечению цилиндра  $S_t$  и «поток тепла»  $\int_{S_t} \sum_{i=1}^n a_{i1} u_{x_i} d\hat{x}$  через это сечение и анализе вытекающего из него обыкновенного дифференциального неравенства, не имеющего решений на полупрямой  $t > 0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.
2. Kondrat'ev V. A. On the existence of positive solutions of second-order semilinear elliptic equations in cylindrical domains. — Russ. J. Math. Phys, 2003, т. 10, № 1, с. 11–20.
3. Кондратьев В. А. О положительных решениях слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях. — Тр. МИАН, 2005, т. 250, с. 183–191.
4. Похожаев С. И. Об отсутствии положительных решений эллиптических уравнений в плоских неограниченных областях. — Матем. заметки, 2009, т. 85, в. 2, с. 261–272.