ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

А. М. Ветошкин (Москва, МГУЛеса). **Конечное выражение для решения дискретного уравнения Сильвестра.**

В работе [1] предложено конечное выражение для решения непрерывного уравнения Сильвестра.

Следующая теорема дает аналогичный результат для дискретного уравнения Сильвестра $AXB - X = C$. (A, B, C, X — матрицы одного порядка).

Теорема. *Пусть для уравнения*

$$AXB - X = C \tag{1}$$

выполняется условие однозначности (*см.* [2]):

$$\lambda_i(A)\lambda_j(B) \neq 1, \quad \forall\ i, j. \tag{2}$$

Обозначим

$$C_k = \sum_{i=0}^{k} A^i C B^i, \quad C_0 = C. \tag{3}$$

Минимальный многочлен матрицы $B^T \otimes A$ *обозначим*

$$p(t) = t^l + p_1 t^{l-1} + \cdots + p_{l-1} t + p_l.$$

Тогда решение уравнения (1) *можно найти по формуле*

$$X = -(C_{l-1} + p_1 C_{l-2} + \cdots + p_{l-1} C_0)/p(1). \tag{4}$$

Доказательство теоремы. Из (1) получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} X &= AXB - C = A(AXB - C)B - C = A^2XB^2 - ACB - C \\ &= A^3XB^3 - A^2CB^2 - ACB - C = \cdots . \end{aligned} \tag{5}$$

Из (3) и (5) получаем

$$A^kXB^k - X = C_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2\ldots, \quad C_{-1} = 0. \tag{6}$$

Выпишем равенство, получаемое как линейная комбинация $l+1$ равенств из (6) :

$$\sum_{k=0}^{l} q_k A^k X B^k - \sum_{k=0}^{l} q_k X = \sum_{k=1}^{l} q_k C_{k-1}. \tag{7}$$

Рассмотрим векторизацию выражения $D = \sum_{k=0}^{l} q_k A^k X B^k$ (см. [3]):

$$\mathrm{vect}(D) = \sum_{k=0}^{l} q_k \mathrm{vect}(A^k X B^k) = \sum_{k=0}^{l} q_k \big[(B^k)^T \otimes A^k\big]\mathrm{vect}(X).$$

Применим формулу (см. [3]) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, получим

$$(B^T)^k \otimes A^k = (B^T \otimes A)^k.$$

Таким образом,

$$\mathrm{vect}(D) = \sum_{k=0}^{l} q_k [B^T \otimes A]^k \mathrm{vect}(X).$$

Если в качестве q_k взять коэффициенты минимального многочлена матрицы $B^T \otimes A$, т. е. $q_k = p_{l-k}$, то первое слагаемое в левой части (7) будет нулевым:

$$-\sum_{k=0}^{l} p_k X = \sum_{k=1}^{l} p_{l-k} C_{k-1}. \qquad (8)$$

Известно, что $\lambda(B^T) = \lambda(B)$. Спектр матрицы $B^T \otimes A$ есть произведение спектров сомножителей [3]:

$$\lambda(B^T \otimes A) = \{\lambda_i(A)\lambda_j(B^T) : \forall i,j\} = \{\lambda_i(A)\lambda_j(B) : \forall i,j\}.$$

Из условия однозначности (2) получаем, что в спектре матрицы $B^T \otimes A$ нет числа 1. Поэтому $p(1) = \sum_{k=0}^{l} p_k \neq 0$. Из (8) следует (4). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шестопал В. Е.* Решение матричного уравнения $AX - XB = C$. — Матем. заметки, 1976, т. 19, с. 449–451.
2. *Икрамов Х. Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984, 192 с.
3. *Магнус Я. Р.*, *Нейдеккер Х.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002, 496 с.