ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

В. А. Пухлий (Севастополь, СГУ). **Об ускорении сходимости решения в модифицированном методе последовательных приближений.**

В настоящее время при решении задач математической физики широкое применение получили численные методы [1]. Однако, как справедливо отмечал академик Л. В. Канторович [2], было бы преждевременным на основании доверия к «выводам машинной техники» приближенные аналитические методы считать окончательно устаревшими. Применяя различного рода модификации, некоторые из этих методов могут быть существенным образом улучшены. Классическим примером такого рода модификации является разработанные А. Н. Крыловым методы ускорения сходимости тригонометрических рядов [3].

Автором при решении широкого круга задач математической физики (краевых, начальных, начально-краевых) применялся модифицированный метод последовательных приближений [4–6].

Проведенные исследования ряда краевых задач математической физики [7] показали, что в ряде случаев имеет место медленная сходимость степенных рядов в модифицированном методе последовательных приближений.

В вычислительной математике известно [1], что одна и та же функция может быть представлена целым спектром различных степенных рядов. Представляя по существу одну и ту же функцию, все они обладают весьма различной скоростью сходимости. Но если наша цель — заданная ограниченная точность, то эти представления будут совершенно различны. Самой слабой сходимостью обладают ряды Тейлора, с другой стороны самая сильная сходимость характерна для полиномов Чебышева [8, 9].

Здесь для ускорения сходимости решения используется метод телескопического сдвига степенного ряда Ланцоша [9]. Идея метода заключается в том, что имеющийся в нашем распоряжении ряд Мак-Лорена телескопически сдвигается в гораздо более короткий ряд, не теряя в точности. Для этого используется возможность представления степенного ряда через смещенные полиномы Чебышева [8, 9].

Решение систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в смещенных полиномах Чебышева. Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в нормальной форме Коши:

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^{s} B_{v,m} X_v + f_m, \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Здесь X_m — неизвестные безразмерные функции; $B_{v,m}$ — переменные коэффициенты; ξ — безразмерная координата; v — номер неизвестной функции, при которой стоит коэффициент $B_{v,m}$; m — номер уравнения.

В соответствии с методом переменные коэффициенты $B_{v,m}$ и свободные члены

f_m представлены через смещенные полиномы Чебышева:

$$
\begin{aligned}
B_{v,m} &= \sum_{r=0}^{q} b_{v,m,r} d_r^{-1} \sum_{k=0}^{r} a_k T_k^*(\xi); \\
f_m &= \sum_{r=0}^{q} f_{m,r} (d_r r!)^{-1} \sum_{k=0}^{r} a_k T_k^*(\xi).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Здесь q — степень интерполяционного полинома; a_k — коэффициенты разложения ξ^r в ряд по многочленам Чебышева. В выражениях (2) $d_r = 1$ для $r = 0$ и $d_r = 2^{2r-1}$ для остальных r.

Общее решение системы уравнений (1) имеет вид:

$$
X_m = \sum_{\mu=1}^{s} C_\mu \left[d_0^{-1} a_0 T_0^*(\xi) \delta + \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,\mu,n} \right] + \sum_{j=0}^{q} t_{m,j,0} \left[d_{j+1} (j+1)! \right]^{-1} \sum_{k=0}^{j+1} a_k T_k^*(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} X_{m,n}, \tag{3}
$$

где $t_{m,j,0} = f_{m,r}$ при $j = r$; μ — номер фундаментальной функции; C_μ — постоянные интегрирования. В решении (3) будет $\delta = 1$ если $m = \mu$ и $\delta = 0$ для остальных μ.

Первое приближение $X_{m,\mu,1}$ получается из подстановки нулевого приближения в правую часть однородной системы: $d_0^{-1} a_0 T_0^*(\xi) \delta$ подставляем в $\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^{s} B_{v,m} X_v$.

Последующие приближения осуществляются по формулам:

$$
\begin{aligned}
X_{m,\mu,n} &= \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,\mu,n} \left[d_{n+j-1} (n+j-1)! \right]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi); \\
X_{m,n} &= \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,n,j} \left[d_{n+j-1} (n+j-1)! \right]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi),
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $\beta = n(q+3) - 2$.

Коэффициенты $t_{m,\mu,n,j}$ и $t_{m,n,j}$ определяются через коэффициенты предыдущего приближения по рекуррентным формулам:

$$
\begin{aligned}
t_{m,\mu,n,j} &= \sum_{v=1}^{s} \sum_{r=0}^{q} b_{v,m,r} t_{v,\mu,n-1,j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^{r} (n+j-1-\gamma); \\
t_{m,n,j} &= \sum_{v=1}^{s} \sum_{r=0}^{q} b_{v,m,r} t_{v,n-1,j-r} (n+j)^{-1} \prod_{\gamma=0}^{r} (n+j-\gamma).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Постоянные C_μ, входящие в общее решение системы уравнений (3), находятся из граничных условий.

Анализ результатов. Вышеизложенный подход применялся к исследованию осесимметричной деформации конической оболочки линейно-переменной толщины при воздействии стационарного температурного поля. Для этой задачи известно точное решение А. Д. Коваленко [10], полученное в гипергеометрических функциях.

Проведенные расчеты и сопоставления с результатами работы [10] показали почти полное совпадение, отличия наблюдались лишь в третьем знаке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пухлий В. А.* Численные методы. Теория и практикум в среде MATLAB. Севастополь: Черкасский ЦНТЭИ, 2007, Т. 1. 412 с., 2008, Т. 2. 742 с.

2. *Канторович Л. В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений. — Сиб. матем. ж., 1962, т. 3, № 5, с. 701–709.
3. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М.: Гостехиздат, 1984, 400 с.
4. *Пухлий В. А.* Метод аналитического решения двумерных краевых задач для систем эллиптических уравнений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 5, с. 1275–1282.
5. *Пухлий В. А.* Об одном подходе к решению краевых задач математической физики. — Дифференциальные уравнения, 1979, т. 15, № 11, с. 2039–2043.
6. *Пухлий В. А.* Решение начально-краевых задач математической физики модифицированным методом последовательных приближений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 4, с. 493–495.
7. *Пухлий В. А.*, *Харченко А. Г.* К теории трехслойных изотропных оболочек переменной жесткости. — Изв. АН СССР, МТТ, 1982, № 5, с. 116–123.
8. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980, 510 с.
9. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961, 524 с.
10. *Коваленко А. Д.*, *Григоренко Я. М.*, *Ильин Л. А.* Теория тонких конических оболочек и ее приложения в машиностроении. Киев: изд-во АН СССР, 1963, 287 с.