ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

И. В. Павлов, **С. В. Разгуляев** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана).
Оценка надежности системы с резервированием разнотипными элементами.

Рассматривается система, составленная из n элементов, соединенных параллельно (в смысле надежности) и работающих в режиме нагруженного резервирования. В предположении, что элементы системы отказывают независимо друг от друга, функция надежности системы имеет вид: $P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - P_i(t)]$, где $P_i(t) = \mathbf{P}\{\xi_i > t\}$ — функция надежности i-го элемента, ξ_i — время безотказной работы i-го элемента, $i = 1, 2, \ldots, n$. Предполагается, что элементы системы имеют экспоненциальные распределения времени безотказной работы, т. е. функция надежности системы имеет вид $P(\lambda, t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - \exp\{-\lambda_i t\}]$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — вектор параметров надежности элементов системы. Точные значения параметров элементов λ, чаще всего неизвестны, а известна лишь статистическая информация — результаты испытаний на надежность системы в целом, или ее отдельных компонент (элементов, подсистем).

Пусть d_i — число отказов наблюдаемое на испытаниях элементов i-го типа, $i = 1, 2, \ldots, n$. Задача заключается в нахождении верхней γ-доверительной границы $\overline{Q}$ для вероятности $\overline{Q}(d, t) = \max \prod_{i=1}^{n}[1 - \exp\{-\lambda_i t\}]$ отказа системы, где максимум берется по доверительному множеству

$$H(d) = \left\{\lambda : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i \leqslant \overline{\Lambda}_\gamma(D), \qquad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, n\right\},$$

(здесь $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$, $\overline{\Lambda}_\gamma(D)$ — стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра пуассоновского распределения), или $\overline{Q}(d, t) = e^{-\overline{f}}$, где $\overline{f}(d, t) = \max_{\vec{\lambda} \in H(d)} \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda_i, t)$ (здесь функция $f_i(\lambda_i, t) = \ln(1 - e^{-\lambda_i t})$ монотонно возрастает и выпукла вверх по $\lambda \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.)

Указанный максимум достигается в точке $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$, где $\lambda_i^* = \lambda_i^*(\alpha) = t^{-1} \ln(1 + \alpha t / T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ а величина $\alpha > 0$ определяется из уравнения $\sum_{i=1}^{n} T_i / t \ln(1 + \alpha t / T_i) = \overline{\Lambda}_\gamma(D)$. Верхняя γ-доверительная граница $\overline{Q}$ для вероятности отказа системы $\overline{Q}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \exp\{-\lambda_i^*(\alpha) t\})$. Соответственно, нижняя γ-доверительная граница $\underline{P}$ для функции надежности системы равна $\underline{P}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \exp\{-\lambda_i^*(\alpha) t\})$. Из этих выражений далее следует, что верхняя доверительная граница вероятности отказа системы равна $\overline{Q} = \overline{Q}(t)$ может быть записана в виде $\overline{Q}(t) = \prod_{i=1}^{n}[\alpha(t)\, t] / [T_i + \alpha(t)\, t]$, что приводит к асимптотическому (при $t \to 0$) выражению для верхней доверительной границы

$$\overline{Q} = \overline{Q}(t) = \left(\frac{At}{n}\right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} T_i} \left[1 - \frac{At}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{T_i}\right) + o\,(t)\right].$$

В случае, когда заранее известно, что все элементы системы идентичные (с одинаковыми параметрами надежности $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$), верхняя γ — доверительная граница $\overline{Q}_{id} = \overline{Q}_{id}(t)$ для вероятности отказа системы имеет вид

$$\overline{Q}_{id}(t) = \left(1 - e^{-\overline{\lambda} t}\right)^n = \left(1 - \exp\left\{ - \overline{\Lambda}_\gamma(D) t / \sum_{i=1}^{n} T_i \right\}\right)^n,$$

откуда следует асимптотическое выражение

$$\overline{Q}_{id}(t) = \left(\frac{At}{nT_c}\right)^n \left[1 - \frac{At}{2T_c} + o\,(t)\right], \quad \text{при} \quad t \to 0$$

где $T_c = \sum_{i=1}^n T_i/n$ — среднее время испытаний по элементам системы. Следовательно,

$$\frac{\overline{Q}(t)}{\overline{Q}_{id}(t)} = \frac{T_c^n}{\prod_{i=1}^n T_i}(1 + o\,(1)).$$

Другими словами, при $t \to 0$

$$\frac{\overline{Q}(t)}{\overline{Q}_{id}(t)} \to \frac{T_c}{T_g} \geqslant 1,$$

где $T_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n T_i}$ — среднее геометрическое значение по объемам испытаний элементов. В частном случае, когда объемы испытаний элементов равны: $T_1 = T_2 = \cdots = T_n = T$, имеем $\overline{Q}(t)/\overline{Q}_{id}(t) \to 1$ при $t \to 0$.

Из полученного следует, что дополнительная априорная информация вида $(\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda)$ об идентичности элементов системы в том случае, когда все элементы системы испытываются одинаковое время T, не дает выигрыша при доверительном оценивании функции надежности системы снизу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.*, *Беляев Ю. К.*, *Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965, 524 с.
2. *Барлоу Р.*, *Прошан Ф.* Математическая теория надежности. М.: Наука, 1969, 488 с.
3. *Gnedenko B. V.*, *Pavlov I. V.*, *Ushakov I. A.* Statistical reliability engineering. N.Y.: Wiley, 1999, 517 p.
4. *Павлов И. В.* Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением. — Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления, 1988, № 3, с. 109–116.
5. *Павлов И. В.* Расчет и оптимизация некоторых характеристик для модели вычислительного комплекса. — Информатика и ее примен., 2012, т. 6, в. 2, с. 59–62.