О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 23 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 4
2016

**Т. А. Ласковая, К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина** (Москва, МГТУ им Н. Э. Баумана, ООО «Полиэдр»; Мытищи, МГУ леса). **Развитие теории выпуклых многогранников и определение полиэдральной чебышевской точки. Исторические предпосылки решения задачи линейного программирования. Дж. Данциг и Л. В. Канторович.**

Авторы настоящей статьи ставили перед собой цель: дать краткий исторический анализ теоретических истоков одного из наиболее значимых открытий XX века — создание универсального метода решения задачи линейного программирования. Этот метод был разработан на рубеже 40-х и 50-х годов прошлого века Дж. Б. Данциг и получил название симплекс-метода [1].

Симплекс-метод, необычайно простой с точки зрения его геометрической интерпретации, стал завершением подходов к решению задачи линейного программирования на основе теории выпуклых многогранников.

Структура метода определяется пониманием решения задачи линейного программирования (ЗЛП) как оптимизации линейной функции

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n\} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min),$$

на множестве ограничений, представляющий выпуклый многогранник

$$G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid Ax \leqslant b, x \geqslant 0\},$$

где $A = \{a_{ij}\}_{mxn}$ — матрица, а $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ при условии $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$.

Разумеется, при введении дополнительных переменных система неравенств-ограничений может быть сведена к системе равенств.

Симплекс-метод как алгоритм был основан на следующих базовых процедурах и фактах теории выпуклых многогранников.

1. Теорема Вейля–Минковского (см., например, [2]).

Множество M является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда M — ограниченный полиэдр (Г. Вейль (1885–1955), Г. Минковский (1864–1909).

2. Решение ЗЛП достигается в вершине выпуклого многогранника G [1].

Этот факт предоставляется геометрически прямым следствием теоремы Вейля–Минковского, так как $f = \mathrm{const}$ есть $n$-мерная плоскость.

3. Симплекс-метод может быть предоставлен интерационным процессом перехода от одной вершины многогранника $G$ к соседней так, чтобы в этой новой вершине функция $f(x)$ имела бы значение не меньшее (не большее) чем в предыдущей вершине.

Цепочка вершин, определяемых в итерационном процессе, приводит к вершине, где достигается решение задачи.

Впервые идея итерационного решения ЗЛП была опубликована Ж. Б. Фурье (1768–1830) в работе, посвященной решению частной задачи линейного программирования — задаче определения «наинизшей точки чаши» [3].

4. Между вершинами $G$ и допустимыми базисами $B$ в матрице $A$ в случае $G = \{x | Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$ существует взаимно однозначное соответствие.

Так например, если матрица $A$ имеет структуру $A = (B, N)$, причем $\beta = B^{-1}b \geqslant 0$, то соответствующая вершина имеет вид $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, 0, \ldots, 0,\ \ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T$.

Соседние вершины отличаются друг от друга одним столбцом допустимого базиса.

Немалую роль в развитии идей, положенных в основу направленного перебора вершин многогранника $G$, сыграл принцип так называемого чебышевского приближения (по работам П. Л. Чебышева (1821–1894)) [5, 6]. Поиск чебышевской точки, т. е. точки наименее уклоняющейся по модулю расстояний от системы плоскости:

$$\delta_i(x) = 0, (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\delta_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$, формулируется как задача определения $\inf_x \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\delta_i(x)|$.

В 1907 году Ш. Валле Пуссеном (1866–1962) был предложен метод определения чебышевской точки при известном значении чебышевского отклонения для одной из задач, которая по-существу, является задачей линейного программирования, где автор установил вид исследуемых вершин и предложил итерационный процесс, являющийся прообразом симплекс-метода (см. например, [4]).

Кстати, задача определения «наинизшей точки чаши Фурье» так же является задачей поиска чебышевской точки и может трактоваться как задача линейного программирования [4, 5, 10]. Окончательно этот результат был получен в 1951 году С. И. Зуховицким (см., например, [10]).

Завершая свой краткий исторический анализ истории создания универсального метода решения задач линейного программирования — симплекс-метода авторы считают необходимым остановиться на результатах советского математика Л. В. Канторовича, которые следует сравнить с подходом Дж. Б. Данцига (1914–2005).

В 1939 году Л. В. Канторович (1912–1986) опубликовал обобщение метода решения задачи об оптимальном распределении материала между станками Ленинградского фанерного треста [7]. В общем виде эта задача заключается в распределении заданий для n станков, которые могут выполнять m заданий, производя конечный продукт в виде $S$ деталей. При выполнении $i$-м станком $j$-ого задания производится $a_{ij}l$ деталей вида $r$ (всего таких видов $p$ ). Обозначив через $x_{ij}$ долю времени работы $i$-ого станка в состоянии работы над $j$-м заданием, ставим перед собой задачу максимизации количества общего выбатываемого продукта $w$.

Таким образом, формально задача может быть сформулирована следующим образом:

$$w \to MAX$$

при условиях–ограничениях

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \\
\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ijr}x_{ij} = w \quad (r = 1, 2, \ldots, p), \\
x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n).
\end{gathered} \tag{1}$$

Автор предложил алгоритм решения этой задачи весьма близкий по структуре к двойственному симплекс–методу.

Значение результата Л. В. Канторовича было выявлено впоследствии Т. Купмансом, указавшим на эквивалентность задачи (1) общей задачей линейного программирования [8]. Именно его внимание к результатам Л. В. Канторовича стало решающем при совместном представлении ими цикла трудов по решению транспортных задач, оцененных премией памяти А. Нобеля в 1975 году за достижения в области экономических наук. Разработка методов решения транспортных задач — старейших прикладных задач, сформулированных еще в конце XVIII века Гаспаром Монжем (1746–1818) [9], способствовало в дальнейшем изучению, так называемых, транспортных многогранников.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dantzig G. B.* Maximization of a lineaz function of variables subject of a leneaz inequalities. — In: Activity Analysis of Production and Allocation (Tj. Koopmans. ed). N.Y.: Wiley, 1951, p. 339–347.
2. *Емеличев В. А.*, *Ковалев М. М.*, *Кравцов М. К.* Многогранники,графы, оптимизация. М.: Наука, 1981, 344 с.
3. *Fourier J. B. J.* Analyse des travaux de l'Academie Royale des Sciences pendant l'annee 1823, Partie mathematique.
4. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования в 2-х томах. М.: Мир, 1991, 702с.
5. *Рыбников К. К.* Развитие теории многогранников от древнейших времен до создания теории линейного программирования. Страницы истории. Приложение в книге Галканова А., Какалыева Я. Симплекс-метод в понятиях, задачах и решениях. М: Новое время, 2014, 117 с. (с. 91–117).
6. *Ласковая Т. А.*, *Рыбников К. К.*, *Чернобровина О. К.* История развития методов анализа полиэдральных математических моделей. — В сб.: Труды X международных Колмогоровских чтений. Ярославль: ЯГПУ, 2012, с. 187–191.
7. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: ЛГУ, 1939, 68 с.
8. *Kooptmans T. A.* Note about Kantorovich's paper «Mathematical methods of organizing and planning production». Management Science 6 (1959–1960), p. 363–365.
9. *Monge G.* Mémoire sur la théorie des déblais et das remblais. Historie de l'Académie Royal des Sciences, avec les mémoires de Mathematique et de Physique (1781).
10. *Зуховицкий С. И.*, *Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967, 466 с.