ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

А. Н. Тырсин (Екатеринбург, УрФУ). **Логистическая регрессия как диагностическая модель сложных стохастических систем.**

Логистическая регрессия делит множество многомерных данных линейной границей на области, соответствующих заданным классам. Рассмотрим случай двух классов. Имеем выборку $(\mathbf{x}_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\mathbf{x}_i^T = (1, x_{i1}, \ldots, x_{im})$ — вектор значений i-го объекта, $y_i \in \{-1; 1\}$ — переменная принадлежности i-го объекта соответствующему классу (например, первому классу при $y_i = -1$ и второму — при $y_i = 1$), m — число признаков, n — количество наблюдений.

Классификацию осуществляют с помощью функции

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp\{-\mathbf{b}^T\mathbf{x}\}}, \qquad (1)$$

принимающей значения в интервале $(0; 1)$.

Вектор $\mathbf{b}^T = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ задает разделяющую линейную границу

$$W(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_j. \qquad (2)$$

Для наблюдения $\mathbf{x}$ вероятность его отнесения к первому классу равна $\mathbf{P}\{\mathbf{x} \in D_1\} = 1 - h(\mathbf{x})$, а ко второму — $\mathbf{P}\{\mathbf{x} \in D_2\} = h(\mathbf{x})$.

Основными признаками модели являются: объяснение устройства исследуемого объекта, его структуры и свойств; возможность управления объектом, определение наилучшего управления при заданных целях и критериях; прогнозирование прямых и косвенных последствий реализации заданного воздействия на объект [1].

Исследуем (1) и (2) на соответствие признакам модели. Пусть класс D_2 характеризует множество эффективно функционирующих систем. Рассмотрим объект с множеством показателей $\mathbf{x}$. Согласно (1) $h(\mathbf{x})$ можно использовать как целевую функцию, чем больше $h(\mathbf{x})$, тем выше вероятность отнесения объекта к классу D_2.

Свойства объекта определяются местоположением точки $\mathbf{x}$ относительно (2). Их можно описать с помощью расстояния от $\mathbf{x}$ до (2) и градиента $h(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$

$$\operatorname{grad} h(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{-\mathbf{b}^T\mathbf{x}\}}{(1 + \exp\{-\mathbf{b}^T\mathbf{x}\})^2}(b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

т. е. $\operatorname{grad} h(\mathbf{x})$ ортогонален (2).

Изменив у вектора $\mathbf{x}$ k-ю переменную на Δx_k, получим $\widetilde{\mathbf{x}}$, у которого $\forall j \neq k$ $\widetilde{x}_j = x_j$ и $\widetilde{x}_k = x_k + \Delta x_k$. Очевидно, что

$$h(\widetilde{\mathbf{x}}) = \frac{h(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x}) + (1 - h(\mathbf{x}))e^{-b_k \Delta x_k}}, \quad \ln\frac{h(\widetilde{\mathbf{x}})}{1 - h(\widetilde{\mathbf{x}})} - \ln\frac{h(\mathbf{x})}{1 - h(\mathbf{x})} = b_k \Delta x_k,$$

таким образом изменение x_k на единицу при фиксировании остальных переменных изменяет величину $\ln\frac{h(\mathbf{x})}{1-h(\mathbf{x})}$ на b_k единиц. Следовательно, для увеличения $h(\mathbf{x})$ при положительном значении b_k приращение Δx_k должно быть положительным, а при отрицательном — отрицательным.

Управление объектом можно реализовать в виде экстремальных задач.

З а д а ч а 1. Максимизация $h(\mathbf{x})$ при ограничениях на изменение $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\begin{cases} h(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m}, \\ x_j = x_j^* + \Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ \Delta_j \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

где Δ_j — изменение j-й компоненты, G_j — область допустимых значений ее изменения.

З а д а ч а 2. Учтя ограничения и затраты, связанные с изменением компонент x_j, получим

$$\begin{cases} h(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m}, \\ x_j = x_j^* + \Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ \Delta_j \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ v_j(\Delta_j) \leqslant V_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

где $v_j(\Delta_j)$ — затраты на изменение j-й компоненты, V_j — предельные затраты на изменение j-й компоненты.

З а д а ч а 3. Достижение $h(\mathbf{x})$ заданной величины при минимизации затрат на изменение $\mathbf{x}$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} v_j(\Delta_j) \to \min\limits_{\Delta_1,\ldots,\Delta_m}, \\ x_j = x_j^* + \Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ \Delta_j \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ h(\mathbf{x}) = p_0. \end{cases}$$

Прямые последствия реализации воздействия на объект оцениваются значениями целевой функции. Косвенные последствия оцениваются в каждом конкретном случае на основе решения $\mathbf{x}^*$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-06-00048а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашихмин В. Н., Гитман М. Б., Келлер И. Э., Наймарк О. Б., Столбов В. Ю., Трусов П. В., Фрик П. Г.* Введение в математическое моделирование. М.: Логос, 2005.