ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

А. В. Неклюдов (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана)**. Трихотомия решений эллиптических уравнений второго порядка с убывающим потенциалом в цилиндре.**

Хорошо известно [1], что для любого решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$u'' - q(t)u = 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} tq(t)\,dt < \infty,$$

на полупрямой $t > t_0$ справедлива асимптотика $u(t) \sim ct$, $c = \mathrm{const} \neq 0$, либо $u(t) \to \mathrm{const}$, $t \to \infty$. В данной работе рассматривается аналогичный вопрос, для эллиптического уравнения второго порядка в полубесконечном цилиндре с однородным краевым условием Неймана на боковой поверхности цилиндра. Установлено, что при выполнении соответствующего интегрального условия для потенциала $q(x)$ справедлив аналогичный результат с добавлением третьей возможности — экспоненциального роста (трихотомия решений).

Аналогичные вопросы изучались ранее для уравнений без младшего члена [2]–[3].

Рассмотрим равномерно эллиптическое уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) - q(x)u = 0 \tag{1}$$

в полубесконечном цилиндре $\Omega = (0, +\infty) \times \widehat{\Omega}$, $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с липшицевой границей.

Рассматриваются решения, удовлетворяющие однородному граничному условию Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \tag{2}$$

на боковой части границы цилиндра, ν — конормаль к границе.

Основной результат о трихотомии решений в случае быстрого убывания младшего коэффициента уравнения состоит в следующем.

Теорема. *Пусть* $q(x) \geqslant 0$ *в* Ω, $\int_\Omega x_1 q(x)\,dx < \infty$, *для некоторого* $p > n/2$ *выполнена оценка* $||q||_{L_p(\Omega\cap\{t<x_1<t+1\})} \leqslant c$ *при* $t \geqslant t_0 = \mathrm{const}$, c *— некоторая положительная постоянная, зависящая от постоянных эллиптичности* λ_1, λ_2 *уравнения* (1) *и области* $\widehat{\Omega}$. *Тогда любое решение задачи — ведет себя одним из трех возможных способов*:

1) $u(x) \to C = \mathrm{const}$, $x_1 \to \infty$ *;*

2) $\sup_{x_1=t} |u| \geqslant C_0 \exp\{At\}$, *где постоянная* $A > 0$ *зависит от* $\widehat{\Omega}$, λ_1, λ_2; $C_0 = \mathrm{const} > 0$;

3) $C_1 x_1 \leqslant u(x) \leqslant C_2 x_1$ *при* $x_1 \geqslant x_1^{(0)} = \mathrm{const} > 0$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}$, $C_1 C_2 > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
2. *Олейник О. А.*, *Иосифьян Г. А.* О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей. — Матем. сб., 1980, т. 112, в. 4, с. 588–610.
3. *Ландис Е. М.*, *Панасенко Г. П.* Об одном варианте теоремы типа Фрагмена–Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной. — Труды семинара им. И. Г. Петровского. Изд-во МГУ, 1979, в. 5, с. 105–136.