ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

В. И. А ф а н а с ь е в (Москва, МИРАН). **Функциональные предельные теоремы для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц.**

Рассмотрим разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц, в котором частицы первого типа производят как частицы первого типа, так и частицы второго типа, причем в одинаковых количествах, а частицы второго типа производят только частицы своего типа. Уточним определение.

Пусть $\{f_k,\ k\in\mathbf{N}_0\}$ — последовательность неотрицательных чисел, причем НОД $\{k : f_k>0\}=1$. Положим $f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}f_ks^k$ при $s\geqslant 0$ и пусть $r>0$ — радиус сходимости этого ряда. Предположим, что существует такое число $\tau\in(0,r)$, что $\tau f'(\tau)=f(\tau)>0$. Положим $p_k=\tau^kf_k/f(\tau)$ при $k\in\mathbf{N}_0$ и введем производящую функцию $\varphi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k$. Если ξ — случайная величина с производящей функцией φ, то $\mathbf{E}\,\xi=1$, $\mathbf{Var}\,\xi=\tau^2\varphi''(\tau)/\varphi(\tau):=\sigma_1^2$.

Пусть $\psi(s)$, $s\geqslant 0$, — производящая функция вероятностного распределения, причем если η — случайная величина с производящей функцией ψ, то $\mathbf{E}\,\eta=1$, $\mathbf{Var}\,\eta=\sigma_2^2\in(0,+\infty)$.

Для рассматриваемого ветвящегося процесса введем производящие функции потомства одной частицы первого и второго типов соответственно:

$$f_1(s_1,s_2)=\varphi(s_1s_2),\quad f_2(s_1,s_2)=\psi(s_2),\qquad s_1,s_2\geqslant 0.$$

Обозначим ξ_n и η_n количества частиц первого и второго типов соответственно в n-м поколении рассматриваемого ветвящегося процесса. Предполагается, что $\xi_0=1$ и $\eta_0=0$. Положим $\Sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$.

Сформулируем основные полученные результаты.

Теорема 1. *При* $N\to\infty$

$$\left\{\frac{\xi_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{\sqrt{N}},\ t\geqslant 0\,\middle|\,\Sigma=N\right\}\xrightarrow{D}\left\{\frac{\sigma_1}{2}l_0^+\Big(\frac{\sigma_1}{2}t\Big),\ t\geqslant 0\right\},$$

$$\left\{\frac{\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{N},\ t\geqslant 0\,\middle|\,\Sigma=N\right\}\xrightarrow{D}\left\{\frac{\sigma_1}{2}\int_0^t l_0^+\Big(\frac{\sigma_1}{2}s\Big)ds,\ t\geqslant 0\right\},$$

где $\{l_0^+(y),\ y\geqslant 0\}$ *— локальное время броуновской экскурсии.*

Символ $\xrightarrow{D}$ в теореме 1 означает сходимость по распределению в пространстве $D[0,+\infty)$ с топологией Скорохода.

Теорема 2. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{K_N\}$ *такова, что* $K_N/\sqrt{N}\to\infty$ *и* $K_N/N\to 0$ *при* $N\to\infty$. *Тогда при* $N\to\infty$

$$\left\{\xi_{\lfloor tK_N\rfloor},\ t>0\ \middle|\ \Sigma=N\right\}\xrightarrow{D}0,$$

$$\left\{\frac{\eta_{\lfloor tK_N\rfloor}-N}{\sigma_2\sqrt{K_NN}},\ t>0\ \middle|\ \Sigma=N\right\}\xrightarrow{D}\{W(t),\ t>0\},$$

где $\{W(t),\ t\geqslant 0\}$ *— стандартное броуновское движение.*

Теорема 3. *При* $N \to \infty$

$$\{\xi_{\lfloor tN \rfloor},\ t > 0 \mid \Sigma = N\} \xrightarrow{D} 0,$$

$$\left\{\frac{\eta_{\lfloor tN \rfloor}}{N},\ t > 0 \,\middle|\, \Sigma = N\right\} \xrightarrow{D} \{Y(\sigma_2^2 t/2),\ t > 0\},$$

где $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ *— феллеровская диффузия, причем* $Y(0) = 1$.

Символ $\xrightarrow{D}$ в теоремах 2, 3 означает сходимость по распределению в пространстве $D[v, +\infty)$ с топологией Скорохода при каждом $v > 0$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В. И.* Функциональные предельные теоремы для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц. — Дискретн. матем., 2015, т. 27, в. 2, с. 22–44.