ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

А. А. Шишкова, С. М. Пергаменщиков (Томск, НИ ТГУ).
Построение хеджирующих стратегий для азиатских опционов европейского типа.

В работе рассматривается задача построения хеджирующей стратегии для азиатского опциона европейского типа. Для изучения гладкости бесконечномерных нелинейных функционалов от винеровских процессов в работе используется техника «броуновского моста», позволяющая сводить анализ интегралов по бесконечномерным распределениям к расчетам интегралов по скалярным распределениям.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{0\leqslant t\leqslant T}, \mathbf{P})$ — стохастический базис, рассмотрим модель Блэка–Шоулса следующего вида

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1, \\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Модель рассматривается на временном интервале $[0, T]$, где T — дата исполнения опциона. Таким образом, финансовый рынок состоит из двух активов. Один из них — безрисковый актив $B = (B_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, другой — рисковый актив (акции) $S = (S_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$. $(W_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ — винеровский процесс и μ, σ, S_0 — константы, $\sigma > 0$ — параметр волатильности.

Для оптимального распределения ресурсов инвестору необходимо построить финансовую стратегию. Введем ее определение.

О п р е д е л е н и е. *Финансовой стратегией* (*портфелем*) назовем согласованный с фильтрацией случайный процесс $\pi : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $\pi = (\pi_t)_{0\leqslant t\leqslant T} = (\beta_t, \gamma_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$.

Компоненты β_t, γ_t означают, что в момент времени t инвестор обладает количеством β_t безрискового актива и γ_t рискового актива.

Теорема 1. *Пусть* $W = (W_t, \mathcal{F}_t^W)_{0\leqslant t\leqslant T}$ *— винеровский процесс относительно естественной фильтрации. Если* $X \in \mathcal{M}_T^W$, *тогда существует процесс* $\big(f(s,\omega), \mathcal{F}_s^W\big)_{0\leqslant t\leqslant T}$ *такой что* $\mathbf{E}\int_0^T f^2(s,\omega)ds < \infty$ *и* $\langle x, W\rangle_t = \int_0^t f(s,\omega)ds$ *и для всех* t

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s,\omega)dW_s. \tag{2}$$

Далее применяем теорему 1 о представлении для квадратично интегрируемых мартингалов к следующему мартингалу

$$M_t = \mathbf{E}^*(e^{-rT} f_T | \mathcal{F}_t), \tag{3}$$

здесь $\mathbf{E}^*$ — математическое ожидание по такой мере $\mathbf{P}^*$, что $\mathbf{P}^*(A) = \int_A L_T dP$, $\forall A \in \Omega$, где $L_T = \exp\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 T\}$.

Стратегия $\pi = (\beta_t, \gamma_t)$ строится по следующим формулам

$$\beta_t = M_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s^* - \gamma_t \widetilde{S}_t; \qquad \gamma_t = \alpha_t/(\sigma \widetilde{S}_t).$$

Коэффициенты α_t находим по формуле $\alpha_t = \frac{d}{dt} < M, W_t^* >$.

Вводя обозначения

$$\xi_t = \int_0^t S_v\,dv, \quad \eta_t = \int_t^T \exp\{\alpha(v-t) + \sigma(W_v^* - W_t^*)\}\,dv,$$

получаем

$$M_t = e^{-rT} G(t, \xi_t, S_t),$$

где

$$G(t,x,y) = \mathbf{E}^* \left(\frac{x + y\eta_t}{T} - K\right)_+ .$$

Переходим здесь от математического ожидания относительно меры $\mathbf{P}^*$ к математическому ожиданию относительно меры $\mathbf{P}$ и получаем

$$G(t,x,y) = \mathbf{E} \left(\frac{x + yI_{T-t}}{T} - K\right)_+ , \tag{4}$$

где

$$I_v = \int_0^v \exp\{\alpha u + \sigma W_u\}\,du. \tag{5}$$

Пусть $q(z,t)$ — плотность I_t, тогда

$$G(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}} (x + yz - KT)_+ q(z, T-t)\,dz.$$

Для вычисления этого интеграла, находим вид функции $q(z,t)$, используя технику «броуновского моста» и доказываем следующую теорему

Теорема 2. *Пусть* $q(t,z)$ *— плотность случайной величины* $I_t = \int_0^t \exp\{\alpha u + \sigma W_u\}\,du$. *Тогда* $\forall z > 0$, $0 < t < T$ *существуют*

$$\frac{\partial q(t,z)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 q(t,z)}{\partial z^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Janvresse E.*, *Pergamenchtchikov S.*, *de Fitte P. R.* Mathematiques pour la finance et l'assurance. Rouen: l'Univ. de Rouen, 2008.
2. *Липцер Р. Ш.*, *Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974, 696 с.
3. *Ширяев А. Н.* Основы стохастическая финансовой математики. М.: Фазис, 1998.