

А. В. Калинин, А. В. Смирнов (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Вероятности вырождения марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $T_1 \rightarrow 0, T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$,

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 p_{00} t + o(t), \quad P_{(\alpha_1-1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 p_{01} t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2-2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_2 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) t + o(t), \quad P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 1 - (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 (\alpha_2 - 1)) t + o(t),$$

где $p_{00} \geq 0, p_{01} \geq 0, p_{00} + p_{01} = 1$. Производящая функция переходных вероятностей $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$, $|s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1$, удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [2]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial t} = \lambda_2 (s_1 - s_2^2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_2^2} + \lambda_1 (p_{00} + p_{01} s_2 - s_1) \frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_1},$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} / (\alpha_1! \alpha_2!) P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)$, удовлетворяет первому (обратному) уравнению Колмогорова (см. [2], задача 3.3.3.4)

$$\frac{\partial G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2)}{\partial t} = \left(\lambda_2 z_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + \lambda_1 z_1 \left(p_{00} + p_{01} \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right) G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2),$$

с начальным условием $G_{(\beta_1, \beta_2)}(0; z_1, z_2) = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} / (\beta_1! \beta_2!)$. Состояния $(0, 0), (0, 1)$ являются поглощающими; вероятности остановки процесса равны $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)$, $\gamma_2 = 0, 1$. Для экспоненциальной производящей функции

$$g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad \gamma_2 = 0, 1,$$

имеем $g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_{(0, \gamma_2)}(t; z_1, z_2)$ и $g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\lambda_2 z_2^2 \left(\frac{\partial g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_2^2} \right) + \lambda_1 z_1 \left(p_{00} g_{(0, \gamma_2)} + p_{01} \frac{\partial g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_2} - \frac{\partial g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_1} \right) = 0, \quad \gamma_2 = 0, 1,$$

при условиях $g_{(0, 0)}(0, 0) = 1, \partial g_{(0, 0)} / \partial z_2(0, 0) = 0; g_{(0, 1)}(0, 0) = 0, \partial g_{(0, 1)} / \partial z_2(0, 0) = 1$. Последнее уравнение в силу аналитичности искомого решения при всех значениях переменных равносильно системе из двух дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_2^2} = 0, \quad p_{00} g_{(0, \gamma_2)} + p_{01} \frac{\partial g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_2} - \frac{\partial g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_1} = 0,$$

общее решение которой легко находится. Частные решения имеют вид

$$g_{(0,0)}(z_1, z_2) = \frac{p_{00}e^{z_1+z_2}}{1+p_{00}} + \frac{e^{p_{00}^2 z_1 - p_{00} z_2}}{1+p_{00}}, \quad g_{(0,1)}(z_1, z_2) = \frac{e^{z_1+z_2}}{1+p_{00}} - \frac{e^{p_{00}^2 z_1 - p_{00} z_2}}{1+p_{00}}.$$

Раскладывая экспоненты в ряд по z_1, z_2 , получаем утверждение.

Теорема [1]. Вероятности вырождения равны

$$q_{(0,0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{p_{00} + (-p_{00})^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{1 + p_{00}}, \quad q_{(0,1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1 - (-p_{00})^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{1 + p_{00}}, \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots$$

В [1] получены формулы для вероятностей вырождения для марковских ветвящихся процессов с взаимодействием при двух поглощающих состояниях: схема $T_1 \rightarrow 0, T_2; 2T_2 \rightarrow 0, T_1, T_2$; и схема $T_1 \rightarrow 0, 2T_1, T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$, схема $T_1 \rightarrow 0, 2T_1, T_2; 2T_2 \rightarrow 0, T_1, T_2$, схема $T_1 \rightarrow 0, 2T_1, T_2; 2T_2 \rightarrow T_2, 3T_2$ в докритических случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов А. В.* Финальные вероятности некоторых многомерных марковских процессов гибели линейного и квадратичного типов. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 128 с.
2. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.