ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

М. В. Малютина (Иркутск, ИГУ). **Проблема существования периодических решений интегральных уравнений Вольтерра.**

В настоящее время вопрос существования периодических решений интегральных уравнений Вольтерра недостаточно изучен даже в линейном случае. Почти во всех немногочисленных работах по этой тематике рассматриваются нелинейные интегральные уравнения в предположениях периодичности с одинаковыми основными периодами подынтегральных выражений по обоим аргументам и свободной функции. При этом осуществляется поиск достаточных условий существования периодического решения с тем же периодом. Подобные допущения делаются обычно в теории колебаний, где периодичность входных данных дифференциального уравнения является необходимым условием наличия у него периодического решения. Как показывает пример $t * \varphi(t) = t - \sin t$, $\varphi(t) = \sin t$, интегральное уравнение Вольтерра может иметь периодическое решение в случае непериодичности ядра и правой части. Одновременно с этим, их периодичность еще не гарантирует существование периодического решения, например $\cos t * \varphi(t) = 1 - \cos t$, $\varphi(t) = t$. Также важной задачей является отыскание основного периода решения, который далеко не всегда наследуется от ядра или правой части. Уравнение $\sin t * \varphi(t) = \sin \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\sin t$ с 2π-периодическим ядром и 6π-периодической правой частью имеет 3π-периодическое решение $\varphi(t) = \frac{5}{9}\sin\frac{2}{3}t$. Другой пример $\sin t * \varphi(t) = 1 - \cos t$, $\varphi(t) = 1$, иллюстрирует ситуацию, когда 2π-периодическим ядру и свободной функции соответствует периодическое решение, не имеющее основного периода. Эти эффекты возникают для самых простых объектов — линейных интегральных уравнений Вольтерра типа свертки. Цель работы состоит в изучении проблемы периодичности решений интегральных уравнений с учетом выявленной специфики. Первым шагом в этом направлении следует провести анализ свойства периодичности интегрального выражения — свертки Лапласа

$$k(x) * f(x) = \int_0^x k(x-t)f(t)dt,$$

непрерывных функций $y = k(x)$ и $y = f(x)$. Оказывается, что их периодичность не доставляет ни достаточного, ни необходимого условий периодичности свертки. Рассмотрены три важных частных случая: $k(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}$, $k(x) = e^x$ и $k(x) = \sin x$. Показано, что необходимым условием периодичности соответствующих сверток Лапласа является периодичность с тем же периодом функции $f(x) \in C(x \geqslant 0)$. Доказаны критерии периодичности сверток [1], указаны возможные значения их основных периодов. Одним из наиболее интересных является факт, что при условии соизмеримости (но не кратности!) основного периода T функции $y = f(x)$ с 2π свертка $\sin x * f(x)$ периодична всегда. Полученные результаты обобщены на случай $\mathcal{E}_N(x) * f(x)$, где $\mathcal{E}_N(x)$ — фундаментальное решение дифференциального оператора N-го порядка с постоянными коэффициентами. Кроме того, изучена структура рассматриваемых сверток в предположении периодичности функции $y = f(x)$, что затем позволило доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. *Уравнение* $t^{n-1} * \varphi(t) = f(t)$ *имеет единственное непрерывное на всей числовой прямой* T*-периодическое решение* $\varphi(t) = \frac{\mathcal{E}^{(n)}(t)+A_n}{n!}$, *тогда и* *только тогда, когда* $f(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_{i-1}t^{i-1}}{(i-1)!} + \mathcal{E}(t)$, *где* $\mathcal{E}(t) \in C^n(t \geqslant 0)$ — T*-периодическая функция,* $\mathcal{E}^{(i)}(0) = -A_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Утверждение 2. *Уравнение* $e^t * \varphi(t) = f(t)$ *имеет единственное непрерывное на всей числовой прямой* T*-периодическое решение* $\varphi(t) = \mathcal{E}'(t) - \mathcal{E}(t)$, *тогда и только тогда, когда* $f(t) = Ce^t + \mathcal{E}(t)$, *где* $\mathcal{E}(t) \in C^1(t \geqslant 0)$ — T*-периодическая функция,* $\mathcal{E}(0) = -C$.

Утверждение 3. *Уравнение* $\sin t * \varphi(t) = f(t)$ *имеет единственное непрерывное на всей числовой прямой* T*-периодическое решение* $\varphi(t) = \mathcal{E}''(t) + \mathcal{E}(t)$, *тогда и только тогда, когда* $f(t) = A\cos t + B\sin t + \mathcal{E}(t)$, *где* $\mathcal{E}(t) \in C^2(t \geqslant 0)$ — T*-периодическая функция, причем* $T \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\mathcal{E}(0) = -A$, $\mathcal{E}'(0) = -B$.

Таким образом, построены периодические решения линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки со степенным, экспоненциальным и синусоидальным ядрами. Предложенные идеи и подходы вполне применимы к доказательству более общих утверждений, что является предметом дальнейших исследований автора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-31-00291.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина М. В.* Периодичность свертки Лапласа: примеры. — Материалы научно-практической конференции «Математика, информатика, автоматика (IMA: 2016)», Сумы, СумГУ, 2016, с. 227.