

С. А. Д о в б ы ш (Москва, СУНЦ МГУ). **О введении понятия предела в курсах высшей математики.**

Основополагающее понятие предела (последовательности и функции), на котором построено все здание математического анализа, оказывается сложным для изучения и многие учащиеся испытывают проблемы с его усвоением. Мы останавливаемся на вопросах, связанных с введением этого понятия в курсах высшей математики, преподаваемых в вузах, делая особый акцент на курсах с углубленным изучением математики. На основе анализа более 40 учебников и учебных пособий разного уровня удалось выявить некоторые типичные несовершенства многих курсов, которые не способствуют усвоению студентами понятия предела, а также специфические подходы и особенности некоторых курсов, призванные упростить его изучение.

Так, определение предела функции по Гейне (через предел последовательности) оказывается очень удобным для доказательства основных теорем о пределах, хотя это определение в меньшей степени отражает суть предела, чем определение по Коши (на « $\varepsilon - \delta$ языке»). В учебнике В. А. Ильина и Э. Г. Позняка сознательно принята «концепция построения теории предельного значения и непрерывности функции только на основе определения предела функции по Гейне», а «введение второго эквивалентного определения предела функции по Коши, часто трудно воспринимаемого студентами первых курсов, откладывается до главы», посвященной основным теоремам о непрерывных и дифференцируемых функциях. Некоторые авторы сразу дают определение предела функции по множеству и уже на его основе вводят односторонние пределы. Л. Д. Кудрявцев использует такое общее определение, но при этом не накладывает дополнительное условие, что рассматриваемые значения переменной отличны от ее предельного значения a — вместо этого достаточно выколоть точку a из рассматриваемого множества; он специально посвятил статью обоснованию своего тезиса, что такое определение, содержащее на одно условие меньше, имеет много преимуществ по сравнению с классическим определением, использующим проколотые окрестности, поскольку оно упрощает формулировки и доказательства теорем и дает естественный ответ на вопрос, непрерывна ли функция в изолированной точке своей области определения. (Этому подходу независимо следует и Л. Шварц, хотя он рассматривает предел в более общем контексте отображений топологических пространств.)

Основные же из упомянутых недостатков следующие:

1) Определения даются формально, без разъяснения не наглядном уровне их сути; в значительной части учебников отсутствуют графические иллюстрации. Представляется также полезным проиллюстрировать два-три конкретных примера вычисления предела, пользуясь только его интуитивным понятием и наглядными рассуждениями (как это делали все математики до введения строгих определений). Такой подход присутствовал в старых учебниках, а ныне он в значительной мере изгнан, хотя порой и встречается, особенно в учебниках для вузов с небольшой программой по математике (так, в учебнике И. П. Натансона вообще строгого определения предела функции не дается, а вычисления этих пределов проводятся).

2) Поскольку суть понятия предела не прояснена, то остается непроясненной и связь между определениями предела функции для разных случаев значения предела

(конечное число или бесконечность со знаком или без знака) и разных случаев стремления переменной. В результате студент оказывается вынужден заучивать множество определений предела функции — каждое определение для каждого случая — вместо того, чтобы понять, что все эти определения строятся по одной схеме. Хотя во многих учебниках говорится, что все эти определения строятся по одной схеме, и это делается часто после разбора конкретных случаев значений пределов и стремлений переменной, но далеко не всегда четко разъясняется, в чем эта общая схема состоит, и читателю приходится осмысливать ее до определенной степени самостоятельно. В большинстве учебников не говорится, что понятие предела связано с понятием «близости» точек, а выражением понятия «близкие точки» является понятие окрестности, которое позволяет сформулировать общее определение предела функции.

3) Равенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ означает, что значение функции $f(x)$ стремится к A , когда переменная x стремится к a . По сути дела, и для значения функции и для переменной используется понятие «переменная величина стремится к пределу». Как оказалось, в большинстве старых учебников (Э. Чезаро, Э. Гурса, Ш.-Ж. Валле-Пуссен, Н. Н. Лузин, В. И. Смирнов, А. Я. Хинчин, В. В. Немыцкий и др., Н. С. Пискунов, первые три издания учебного пособия В. А. Кудрявцева и Б. П. Демидовича) дается обсуждение этого понятия, вначале на интуитивном уровне, а потом, в ряде книг (но далеко не во всех) и в более строгих терминах для каждого конкретного случая стремления. Определение предела функции оказывается производным от понятия предела переменной величины, хотя и требует определенной аккуратности, поскольку предполагает, что стремление независимой переменной x происходит одним из стандартных способов, в отличие от стремления функции $f(x)$ (факт, упущенный из виду в некоторых старых учебниках). Этот подход лучше способствует пониманию сути понятия предела. Но ныне он из современных учебников почти совершенно изгнан.