ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

С. С. Орлов (Иркутск, ИГУ). **Интегро-дифференциальная модель упругих колебаний.**

Исследование динамики вязкоупругой среды приводит к необходимости решать начально-краевые задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с частными производными. Такие задачи с единых позиций могут быть изучены в абстрактном виде

$$Bu^{(N)}(t)-\sum_{i=1}^{N}A_{N-i}u^{(N-i)}(t)-\int_0^t k(t-s)u(s)ds=f(t),\quad u^{(i-1)}(0)=u_{i-1},\quad i=1,\dots,N,$$

где B, A_{N-i}, $k(t):E_1\to E_2$ — замкнутые линейные операторы, E_1, E_2 — банаховы пространства, оператор B *фредгольмов*. С помощью конструкции *фундаментальной оператор-функции* интегро-дифференциального оператора в банаховых пространствах в работе [1] изучена однозначная разрешимость этой начальной задачи в классах распределений и функций сильной гладкости порядка N. Применение разработанных методов, как показано в [2, с. 113], становится затруднительным, если при каком-либо $k=1,\dots,N$ выполняется $\bigcap_{i=1}^{k}N(A_{N-i})\cap N(B)\neq\varnothing$. Пример подобной ситуации доставляет модель Буссинеска–Лява

$$\alpha_1u_{tt}-u_{ttxx}+a(\alpha_2u_t-u_{txx})+b(\alpha_3u-u_{xx})=f(t,x),\quad t>0,\quad x\in[0;\,h];$$

$$u(t,x)\big|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t(t,x)\big|_{t=0}=u_1(x),\quad x\in[0;\,h];\quad u(t,0)=u(t,h)=0,\quad t\geqslant 0,$$

продольных колебаний упругого стержня с учетом инерции и массовой нагрузки [3] в случае $\alpha_2=\alpha_1$. Здесь α_1, α_2, α_3, a, b — ненулевые действительные параметры. Заменой $v(t,x)=(\partial_t+a)u(t,x)$ она сводится к интегро-дифференциальной форме

$$\alpha_1v_t-v_{txx}+b\int_0^t e^{-a(t-\tau)}(\alpha_3-\partial_{xx})v(\tau,x)d\tau=f(t,x)-b(\alpha_3u_0-u_0'')e^{-at};\qquad(1)$$

$$v(t,x)\big|_{t=0}=u_1(x)+au_0(x),\quad v(t,0)=v(t,h)=0.\qquad(2)$$

Однозначная разрешимость последней начально-краевой задачи изучена автором на основе редукции к абстрактной задаче Коши вида

$$Bu^{(N)}(t)-\int_0^t g(t-s)Au(s)ds=f(t),\quad u^{(i-1)}(0)=u_{i-1},\quad i=1,\dots,N,$$

где $g=g(t)$ — числовая функция. Доказана следующая

Теорема. *Пусть* $\alpha_1=\lambda_s$, $s\in\mathbb{N}$, *и* $(f,\varphi_s)_{H^L_{[0;\,h]}}\in C^1(t\geqslant 0)$, *тогда начально-краевая задача* (1), (2) *имеет единственное обобщенное решение*

$$\widetilde{v}(t,x)=\Big[u_1(x)+au_0(x)+\sum_{n\neq s}\frac{1}{\alpha_1-\lambda_n}\big(w_n(t)+\int_0^t r_n(t-\tau)w_n(\tau)d\tau\big)\varphi_n(x)$$
$$+\frac{1}{b(\alpha_3-\alpha_1)}\big(f_t+af-b(\alpha_3-\alpha_1)(u_1+au_0),\varphi_s\big)_{H^L_{[0;\,h]}}\varphi_s(x)\Big]\theta(t)$$
$$+\big(f\big|_{t=0}-b(\alpha_3-\alpha_1)u_0,\varphi_s\big)_{H^L_{[0;\,h]}}\varphi_s(x)\delta(t),$$

где $w_n(t) = (\int_0^t f(\tau, x)d\tau - \frac{b}{a}(\alpha_3 - \lambda_n)(t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at}))u_1 - b(\alpha_3 - \lambda_n)tu_0, \varphi_n)_{H^L_{[0;\,h]}}$, $r_n(t)$ *— резольвента ядра* $\frac{\alpha_3-\lambda_n}{\alpha_1-\lambda_n}\frac{b}{a}(e^{-at} - 1)$, $\theta(t)$ *и* $\delta(t)$ *— функции О. Хевисайда и П. Дирака,* $H^L_{[0;\,h]}$ *— пространство С. Л. Соболева,* $L \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{h^2}$, $\varphi_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{h}x$, $C_n = \sqrt{\frac{2}{h\upsilon_n}}$, $\upsilon_n = \sum_{k=0}^{L}\left(\frac{\pi n}{h}\right)^{2k}$, $n \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е. Если $(f, \varphi_s)_{H^L_{[0;\,h]}} \in C^2(t \geqslant 0)$ и

$$(f\big|_{t=0} - b(\alpha_3 - \alpha_1)u_0,\, \varphi_s)_{H^L_{[0;\,h]}} = (f_t\big|_{t=0} - b(\alpha_3 - \alpha_1)u_1,\, \varphi_s)_{H^L_{[0;\,h]}} = 0,$$

то $\widetilde{v}(t, x) = v(t, x)\theta(t)$, причем $v = v(t, x)$ является решением начально-краевой задачи (1), (2) в классе $\mathcal{C}^1(t \geqslant 0;\ \overset{\circ}{H}{}^{L+2}_{[0;\,h]})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-31-00291.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Falaleev M. V., Orlov S. S.* Degenerate Integro-Differential Operators in Banach Spaces and Their Applications. — Russ. Math., 2011., v. 55, № 10, p. 59–69.
2. *Орлов С. С.* Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014, 149 с.
3. *Zamyshlyaeva A. A., Bychkov E. V., Tsyplenkova O. N.* Mathematical models based on Boussinesq–Love equation. — Appl. Math. Sci., 2014, v. 8, №. 110, p. 5477–5483.