ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

Е. Н. Ж и д к о в (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **О численном решении одной обратной задачи нелинейной теплопроводности.**

Рассмотрим задачу создания нужной концентрации вещества по глубине образца. Пусть нам надо создать концентрацию заданного вещества $C(x)$ вдоль однородного стержня длины l. Будем считать поперечное сечение стержня постоянным.

Математически эту задачу можно сформулировать как задачу создания нужного распределения температуры по длине стержня.

Подобные задачи рассматривались в [1, 2].

Решение прямой задачи. Пусть тепловое поле удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k(u-u_1)\eta(u-u_1)\int_0^t\sqrt{(u-u_1)\eta(u-u_1)}\,d\tau,\\ u(x,0)=u_0,\\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\beta(t)u(0,t),\quad u(l,t)=u_0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь k,u_0,u_1 — постоянные, $0<u_0<u_1$, $k>0$, $\eta(u)$ — функция Хевисайда, $\beta(t)>0$, $\beta(t)\in C[0,T]$.

Пусть t_1 — наименьшее значение, при котором $u(0,t_1)=u_1$.

Будем считать, что существует функция $x=\theta(t)\in C^1[t_1,T]$, $\theta'(t)>0$, которая удовлетворяет условию $u(\theta(t),t)=u_1$.

Обратную к ней функцию обозначим $t=\psi(t)$.

Введем фундаментальное решение

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\\ \Phi(x,\xi,t,\tau)=0,\quad \frac{\partial\Phi(0,\xi,t,\tau)}{\partial x}=\beta(t)\Phi(0,\xi,t,\tau),\quad \Phi(l,\xi,t,\tau)=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Умножим уравнение (1) на функцию Φ и проинтегрируем его по области

$$[0,l]\times[0,t].$$

При этом, получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned}u(x,t)\;=\;&u_0-u_0\int_0^t\frac{\partial\Phi(x,l,t,\tau)}{\partial\xi}\,d\tau\\ &+\int_0^t\beta(\tau)u(0,\tau)\Phi(x,0,t,\tau)\,d\tau\\ &+k\eta(u-u_1)\int_{t_1}^t d\tau\int_0^{\vartheta(\tau)}\Phi(x,\xi,t,\tau)(u(\xi,\tau)-u_1)\\ &\qquad\times\int_{\psi(\xi)}^{\tau}\sqrt{u(\xi,\zeta)-u_1}\,d\zeta\,d\xi.\end{aligned}\tag{3}$$

Точка t_1 находится из уравнения

$$u_1 = u_0 - u_0 \int_0^{t_1} \frac{\partial \Phi(x,l,t_1,\tau)}{\partial \xi}\, d\tau + \int_0^{t_1} \beta(\tau) u(0,\tau)\Phi(x,0,t_1,\tau)\, d\tau. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Если* $\beta(t) \in C[0,T]$, *то* $u(x,t) \in C^{1,1}[0,l]\times[0,T]$.

Решение обратной задачи. В качестве обратной задачи рассмотрим следующую.

Пусть нам известно решение задачи (1) при $t = T$, $u(x,T) = C(x)$.

Требуется, зная функцию $C(x)$, найти пару функций $\{\beta(t), u(x,t)\}$. Используя уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} C(x) \;=\; & u_0 - u_0 \int_0^{T} \frac{\partial \Phi(x,l,T,\tau)}{\partial \xi}\, d\tau \\ & + \int_0^{T} \beta(\tau) u(0,\tau)\Phi(x,0,T,\tau)\, d\tau \\ & + k\eta(u-u_1)\int_{t_1}^{T} d\tau \int_0^{\vartheta(\tau)} \Phi(x,\xi,T,\tau)(u(\xi,\tau)-u_1) \\ & \qquad\qquad \times \int_{\psi(\xi)}^{\tau} \sqrt{u(\xi,\zeta)-u_1}\, d\zeta\, d\xi. \end{aligned} \qquad (5)$$

Для упрощения уравнения обозначим

$$C_1(x) = C(x) - u_0 + u_0 \int_0^{T} \frac{\partial \Phi(x,l,T,\tau)}{\partial \xi}\, d\tau. \qquad (6)$$

В новых обозначениях уравнение (5) принимает вид

$$\begin{aligned} C_1(x) \;=\; & \int_0^{T} \beta(\tau) u(0,\tau)\Phi(x,0,T,\tau)\, d\tau \\ & + k\eta(u-u_1)\int_{t_1}^{T} d\tau \int_0^{\vartheta(\tau)} \Phi(x,\xi,T,\tau)(u(\xi,\tau)-u_1) \\ & \qquad\qquad \times \int_{\psi(\xi)}^{\tau} \sqrt{u(\xi,\zeta)-u_1}\, d\zeta\, d\xi. \end{aligned} \qquad (7)$$

Теорема 2. *Если* $\beta(t) \in C[0,T]$ *и существует функция*

$$x = \theta(t) \in C^1[t_1,T], \qquad \theta'(t) > 0,$$

то решение задачи существует и единственно.

Обозначим правую часть уравнения (7) через $A(\beta)$:

$$\begin{aligned} A(\beta) \;=\; & \int_0^{T} \beta(\tau) u(0,\tau)\Phi(x,0,T,\tau)\, d\tau \\ & + k\eta(u-u_1)\int_{t_1}^{T} d\tau \int_0^{\vartheta(\tau)} \Phi(x,\xi,T,\tau)(u(\xi,\tau)-u_1) \\ & \qquad\qquad \times \int_{\psi(\xi)}^{\tau} \sqrt{u(\xi,\zeta)-u_1}\, d\zeta\, d\xi. \end{aligned} \qquad (8)$$

Для устойчивого решения обратной задачи будем минимизировать функционал Тихонова А. Н.

$$\int_0^{l} [A(\beta) - C_1]^2\, dx + \alpha \int_0^{l} [(\beta')^2 + \beta^2]^2\, dx. \qquad (9)$$

Параметр α будем выбирать из условия

$$\int_0^l [A(\beta) - C_1]^2 \, dx = \delta^2, \tag{10}$$

где δ — погрешность измерения функции $u(x,T) - C_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жидков Е. Н.* Об обратной задаче нелинейной теплопроводности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 437–438.
2. *Белов Ю. Я. и др.* Обратные задачи математической физики. Красноярск: М.: Изд-во СФУ, 2008, 140 с.