ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2016

В. А. Лебедев (Москва, МГУ). **О стохастических финансовых моделях с ветвящимся процессом цены.**

Рассмотрим модель с дискретным временем для рискованного финансового актива (X_n), определённого на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и имеющего вид

$$X_n = cZ_n, \quad 1 \leqslant n \leqslant N,$$

где Z_n — число частиц некоторого однородного ветвящегося процесса, а c — константа. Пусть также (B_n) означает финансовый актив с постоянной нормой прибыли $r \geqslant 0$, имеющий вид

$$B_n = B_0(1+r)^n,$$

где B_0 — неслучайная величина. Если $\varphi(z)$ — производящая функция числа потомков частицы ветвящегося процесса за один шаг, то (Z_n) является однородным марковским процессом, переходные вероятности которого за один шаг p_{ik} являются коэффициентами при k-й степени разложения по степеням z функции $\big(\varphi(z)\big)^i$. Наконец, пусть $(\mathcal{F}_n)$ есть такой поток σ-алгебр, что процесс (Z_n) согласован с ним и для него $\mathbf{P}(Z_{n+1} = k | \mathcal{F}_n) = p_{Z_n,k}$. Рассмотрим также европейский колл-опцион $f_N = f(X_1, \dots, X_N) \geqslant 0$, где f — выпуклая функция от $X_1, \dots, X_N$.

Пусть наша модель — одношаговая, т.е. $N = 1$, и $Z_0 = 1$. Пусть a и b — соответственно минимальное и максимальное значение k, для которых $p_{1k} > 0$. Для существования мартингальной вероятностной меры для процесса (Z_n/B_n) в тривиальнои случае (когда $a < b$), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $a < 1+r < b$, и пусть это условие выполнено и, кроме того, $b < \infty$. Пусть также $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ — соответственно максимальное значение $k \leqslant 1+r$ и минимальное значение $k > 1+r$, для которых $p_{1k} > 0$. Для европейского колл-опциона с платежной функцией f_1 определяется как в [1] верхняя $C^*(f_1, \mathbf{P})$ и нижняя $C_*(f_1, \mathbf{P})$ цены.

Аналогично [2] справедлив следующий результат.

Теорема. *Верхняя и нижняя цены для одношаговой модели даются формулами*

$$C^*(f_1, \mathbf{P}) = B_0 \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} \frac{f_1}{B_1}$$

и

$$C_*(f_1, \mathbf{P}) = B_0 \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_*} \frac{f_1}{B_1},$$

где $\mathbf{Q}^*$ *— мартингальная мера Кокса–Росса–Рубинштейна с* $\mathbf{Q}^*(\{b\}) = \frac{1+r-a}{b-a}$ *и* $\mathbf{Q}^*(\{a\}) = \frac{b-1-r}{b-a}$, *а* $\mathbf{Q}_*$ *— аналогичная мартингальная мера с* $\mathbf{Q}_*(\{\widehat{b}\}) = \frac{1+r-\widehat{a}}{\widehat{b}-\widehat{a}}$ *и* $\mathbf{Q}_*(\{\widehat{a}\}) = \frac{\widehat{b}-1-r}{\widehat{b}-\widehat{a}}$.

В частности, если $\widehat{a} = 1+r$, то $\mathbf{Q}_*$ — одноточечная мартингальная мера с $\mathbf{Q}_*(\{1+r\}) = 1$. Если же $\widehat{a} = a$ и $\widehat{b} = b$, т.е. Z_1 принимает лишь два значения a и b, то наша модель совпадает с одношаговой биномиальной моделью Кокса–Росса–Рубинштейна. Могут быть получены подобные результаты и для многошаговой модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики, тт. 1–2. М.: МЦНМО, 2016.
2. *Rüschendorf I.* Upper and lower prices in discrete-time models. — Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2002, т. 237, с. 143–148.