ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2016

А. Р. Симонян, Е. И. Улитина (Сочи, СГУ). **Анализ времен ожидания модели Прабху при фиксированных загрузках.**

Модель $\mathbf{M}_r|\mathbf{G}_r|1|\infty$. В одноканальную систему обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1>0,\dots,a_r>0$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы, не зависят от процесса поступления и для k-вызовов, $k=\overline{1,r}$, имеют функцию распределения $B_k(x), B_k(+0)=0$.

Абсолютные приоритеты. Из очереди i-вызов поступает на обслуживание раньше j-вызова, если $i<j$. Но допускается прерывание обслуживания. При поступлении в систему i-вызова обслуживание j-вызова при $i<j$ прерывается и начинается обслуживание i-вызова. Прерванный вызов при новом поступлении на прибор дообслуживается заново, дообслуживается с прерванного места или уходит из системы без дообслуживания.

Дисциплина Прабху. [1] Поступая в момент t в модель, k-вызов $(k=\overline{1,r})$, приобретает индекс $t+u_k$, где $0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\dots\leqslant u_r$. В любой момент на приборе находится вызов с наименьшим индексом. Параметры $v_k=u_k-u_{k-1}$, $k=\overline{2,r}$ определяют дисциплину. Случаи $v_k=0$ и $v_k\to+\infty$, $k=\overline{2,r}$ дают дисциплины FIFO и относительных приоритетов.

Модель Прабху (порядка r) Модель $\mathbf{M}_r|\mathbf{G}_r|1|\infty$ + дисциплина Прабху.

Характеристики. $\overline{w_k}(t)$ $(k=\overline{1,r};\ t\geqslant 0)$ — условное виртуальное время ожидания (УВВО) k-вызова в момент t, при условии прекращения с момента t доступа вызовов в модель; ρ_{k1} — загрузка модели 1-вызовами, ..., k-вызовами ($\overline{1,k}$-вызовами); $\rho_k=1-\rho_{k1}$ — недогрузка системы $\overline{1,k}$-вызовами.

Цель исследования. Асимптотический анализ $\overline{w_k}(t)$ и вектор процессов $(k=\overline{1,r})$

$$\big(\overline{w_k}(t-\alpha_{2k}),\dots,\overline{w_k}(t-\alpha_{kk}),\overline{w_k}(t)\big) \tag{B.1}$$

при фиксированных загрузках $0<\rho_{k1}<\dots<\rho_{r1}$, $\rho_{r1}\geqslant 1$ и $t\to+\infty$, где $\alpha_{jk}=v_j+\dots+v_k$, $(j=\overline{2,k})$.

Обзор. Интегральные представления и стационарные ФР для векторов а) $(w_1(t),\dots,w_r(t))$, б) $(\overline{w_1}(t),\dots,\overline{w_r}(t))$,
где $w_i(t)$, $i=\overline{1,t}$ — виртуальное время ожидания i-вызова в момент t, найдены в диссертации С. Н. Сандряна [2]. Асимптотические результаты разрозненны, относятся к случаю $\rho_{r1}=1$ (случай $\rho_{r1}>1$ не был рассмотрен) и получены при наличии условия: при $s\downarrow 0$ имеет место представление

$$\sum_{k=1}^{r}a_k\int_0^\infty e^{-sx}dB_k(x)=\sigma-\rho_{r1}s+Bs^\gamma(1+o_s(1), \tag{B.2}$$

где $\sigma=a_1+\dots+a_r$, $1<\gamma\leqslant 2$, $B>0$.

В [2] при $\rho_{r1}=1$, условии (B.2) и $t\to+\infty$:

• получены предельные ФР векторов а) и б), когда параметры $v_2, \dots, v_r$ фиксированы:

• найдена для $\overline{w_k}(t)/t^*$, где $t^* = (Bt)^{1/\gamma}$, предельная ФР при условиях

$$c_i = \lim_{t\to+\infty}(v_i/t^*) < +\infty, \qquad i = \overline{k+1,r}; \tag{В.3$_k$}$$

• для вектора $(\overline{w_1}(t)/t^*, (\overline{w_2}(t)/t^*)$ при $r = 2$ и (В.3$_1$) доказана предельная теорема

Метод анализа основан на уравнениях в терминах случайных величин (СВ), которые связывают $\overline{w_k}(t)$ в модели Прабху со следующими процессами в модели $M_r|G_r|1|\infty$ с абсолютными приоритетами $(k = \overline{1,r},\ 0 \leqslant u \leqslant t)$:

• $b_k(u,t)$ — время обслуживания поступивших за $[u,t)$ $\overline{1,k}$-вызовов;

• $\pi_k(t)$ — период занятости (ПЗ) $\overline{1,k}$-вызовов с задержкой t;

• $I_k^u(t)$ — при наличии начальной задержки u время из $[u,t)$, когда модель свободна от $\overline{1,k}$-вызовов;

• $\overline{w_k^0}(t)$ — УВВО k-вызова в момент t.

Уравнения. Введем события $(k = \overline{1,r-1};\ 0 \leqslant v \leqslant t)$:

$$A_k(t,v) = \{\pi_k(\overline{w_{k+1}}(t) \geqslant v)\}, \quad \overline{A_k}(t,v) = \{\pi_k(\overline{w_{k+1}}(t) < v)\}$$

Тогда $\overline{w_r}(t) = \overline{w_r^0}(t)$ и для $k = \overline{1,r-1}$

$$\overline{w_k}(t) = \begin{cases} \overline{w_{k+1}}(t - v_{k+1}) + b_k(t - v_{k+1}, t) - v_{k+1} \text{ на } A_k(t - v_{k+1}, v_{k+1}), \\ \overline{w_k^0}(v_{k+1} - \pi_k(\overline{w_{k+1}}(t - v_{k+1}))) \text{ на } \overline{A_k}(t - v_{k+1}, v_{k+1}). \end{cases} \tag{В.4}$$

Уравнения (В.4) получены в [2]. Они используются в случае $\rho_{r1} \leqslant 1$.

В случае $\rho_{r1} > 1$ предлагаются уравнения $k = \overline{1,r-1}$:

$$\overline{w_k}(t) = \overline{w_{k+1}}(t - v_{k+1}) + b_k(t - v_{k+1}, t) - v_{k+1} + I_k^\theta(v_{k+1}), \tag{В.5}$$

где $\overline{w_{k+1}}(t - v_{k+1})$.

Условия на процесс загрузки:

— при $\rho_{r1} = 1$ выполнено условие (В.2);

— при $\rho_{r1} > 1$ и $s \downarrow 0$ имеют место представления

$$\sum_{m=1}^{i} a_m \int_0^\infty e^{-sx} dB_m(x) = \sigma_i - \rho_{i1}s + B_i s^\gamma(1 + o_s(1)), \quad i = \overline{k,r}, \tag{В.2$_k$}$$

где $\sigma_i = a_1 + \dots + a_i$, $1 \geqslant \gamma < 2$, $0 < B_k \leqslant \dots \leqslant B_r \stackrel{\text{def}}{=} B$.

Условия на параметры:

1) Упрощающие условия: $v_i \to +\infty$, $t - \alpha_{2r} \to +\infty$, когда $t \to +\infty$.

2) Существуют пределы $(m = \overline{k,r})$: либо

$$M_m = \lim_{t\to+\infty}(s_m(t)/t^{1/\gamma}), \tag{В.6$_k$}$$

либо

$$R_m = \lim_{t\to+\infty}(s_m(t)/(\widehat{B}_m(t))^{1/\gamma}), \tag{В.7$_k$}$$

где обозначено

$$s_m(t) = -\rho_r t - \sum_{i=m}^{r-1}(\rho_i - \rho_r)v_{i+1}, \quad \widehat{B}_m(t) = Bt + \sum_{i=m}^{r-1}(B_i - B)v_{i+1}.$$

Предельные законы строятся с помощью ФР.

1. $\widetilde{G}_\gamma(x)$. $\widetilde{G}_\gamma(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и

$$\int_0^\infty e^{-sx} d\widetilde{G}_\gamma = e^{s^\gamma}\left\{1 - \frac{s}{\Gamma(1/\gamma)}\int_0^1 e^{-s^\gamma u} u^{-(1-1/\gamma)} du\right\}, \quad s \geqslant 0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

2. $G_\gamma(x)$. $G_{1/\gamma}(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и

$$\int_0^\infty e^{-sx} dG_{1/\gamma}(x) = \exp\{-s^{1/\gamma}\}, \quad s \geqslant 0.$$

3. $G_\gamma(x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x} dG_\gamma(x) = \exp\{-(-i\tau)^\gamma\} \quad i = \sqrt{-1}, \quad \tau \in (-\infty, +\infty).$$

4. $\overline{W}_k^0(x)$ — стационарная ФР $\overline{w_k^0}(t)$ при $t \to +\infty$.

Все ФР имеют плотности, обозначаемые малыми буквами с теми же индексами.

Основные результаты.

1°. **Теорема 1.** $\overline{w_k}(t)$ *удовлетворяет закону больших чисел: при* $t \to +\infty$

$$\frac{\overline{w_k}(t) - \max(0, s_k(t))}{t} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0,$$

где $\xrightarrow{\mathrm{P}}$ *знак сходимости по вероятности.*

В частности, если

$$\limsup_{t\to+\infty} s_k(t)/t < 0, \tag{1}$$

то

$$(\overline{w_k}(t)/t) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *При условии* (1) *равномерно по* $x \in (-\infty, +\infty)$ *существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\overline{w_k}(t) < x\right\} = \overline{W}_k^0(x). \tag{3}$$

2°. Приведем одно утверждение из [2] :

Теорема. *Пусть* $\rho_{r1} = 1$, *выполнено условие* (B.2) *и существуют пределы* (B.3 $_k$). *Тогда равномерно по* $x \in [0, +\infty)$ *существуют пределы*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\overline{w_k}(t)}{(Bt)^{1/\gamma}} < x\right\} = \widetilde{G}_\gamma(x - R_k) \tag{4}$$

где $R_k = -\sum_{m=k}^{r-1} \rho_m c_{m+1}$.

Условия (B.3 $_k$) равносильны существованию и конечности пределов(B.6 $_k$) , причем

$$c_{m+1} = -\frac{M_{m+1} - M_m}{\rho_m} B^{-1/\gamma}.$$

Предельное соотношение (4) в этих условиях равносильно следующему: при $x > -R_k$

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\overline{w_k}(t) - s_k(t)}{(Bt)^{1/\gamma}} < x\right\} = \widetilde{G}_\gamma(x). \tag{5}$$

Следующая теорема 3 содержит утверждение С. Н. Сандряна и при условиях (B.2) и $\rho_{r1} = 1$ описывает все предельные ФР для $\overline{w_k}(t)$.

Теорема 3. *Пусть* $\rho_{r1}=1$, *имеет место* (B.2) *и существует предел*

$$M_k=\lim_{t\to+\infty}(s_k(t)/t^{1/\gamma}). \tag{6}$$

a) *Если* $M_k>-\infty$, *то равномерно по* x *существует предел* (5), *равный нулю при* $x\leqslant -R_k$.

b) *Если* $M_k=-\infty$, *то равномерно по* x *существует предел* (3).

Здесь $R_k=B^{-1/\gamma}M_k$.

3°. При условиях (B.2$_k$) и $\rho_{r1}>1$ опишем класс предельных ФР для $\overline{w_k}(t)$, $k<r$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (B.2$_k$), $\rho_{r1}>1$ *и существует предел* (6).

a) *Если* $M_k=+\infty$, *то равномерно по* $x\in(-\infty,+\infty)$ *существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\overline{w_k}(t)-s_k(t)}{(\widehat{B}_k(t))^{1/\gamma}}<x\right\}=G_\gamma(x).$$

б) Если $M_k=-\infty$, *то равномерно по* $x\in(-\infty,+\infty)$ *существует предел* (3).

В частности, пункт а) теоремы 4 исчерпывает случай $\rho_{r1}>1$.

Свойства условий (B.6$_k$) и (B.7$_k$).

1. При существовании пределов (B.6$_k$) и (B.7$_k$)

$$M_k\leqslant\dots\leqslant M_r\quad(R_k\leqslant\dots\leqslant R_r).$$

Более того, условие $M_m=+\infty$ $(M_m=-\infty)$ равносильно условию $R_m=+\infty$ $(R_m=-\infty)$. Пусть найдется такое n, $k\leqslant n<r$, что $\rho_{n1}<1$, $\rho_{n+11}\geqslant 1$ и существует предел

$$\widehat{B}_{n+1}=\lim_{t\to+\infty}(\widehat{B}_{n+1}(t)/t). \tag{7}$$

2. Группа условий: существуют пределы (B.6$_k$),

$$s_{n+1}=\lim_{t\to+\infty}(s_{n+1}(t)/t) \tag{8}$$

и

$$M_k>-\infty,\quad M_n<+\infty,\quad M_{n+1}=+\infty \tag{9}$$

равносильна группе условий

$$c_{n+1}=\lim_{t\to+\infty}\big(s_{n+1}(t)/\widehat{B}_{n+1}(t)\big) \tag{10}$$

и

$$R_k>-\infty,\quad R_n<+\infty,\quad R_{n+1}=+\infty. \tag{11}$$

Более того, $(m=\overline{k,n})$:

$$R_m=\Big(\widehat{B}_{n+1}+\frac{B-B_n}{n-\rho_r}s_{n+1}\Big)^{-1/\gamma}M_m,\quad s_{n+1}=c_{n+1}\widehat{B}_{n+1}.$$

3. Пусть найдется такое n, $k\leqslant n<r$, что $\rho_{n1}=1$. Пределы (7), (8), (10) существуют, причем

$$\widehat{B}_{n+1}=B,\quad s_{n+1}=-\rho_r,\quad c_{n+1}=-\frac{\rho_r}{B}.$$

4. Группа условий: существуют пределы (B.6$_k$) и имеет место (9) равносильна группе условий: существуют пределы (B.7$_k$) и имеет место (11). Более того,

$$R_m=M_mB_n^{-1/\gamma},\quad 0\leqslant R_m<+\infty.$$

Условия $A(n)$ **.** Пусть выполнены условия (В.2_k), найдется такое n, $k \leqslant n < r$, что $\rho_{n1} < 1$, $\rho_{n+11} \geqslant 1$, существуют пределы (В.7_k), (10) и имеет место (11).

Обозначим

$$\lambda_n = \frac{B_n c_{n+1}}{(\rho_n - \rho_r) - (B - B_r)c_{n+1}},$$

$$R_{kn} = R_n + \rho_r \sum_{i=k}^{n-1} \frac{R_{i+1} - R_i}{\rho_i - \rho_r} \tag{12}$$

и введем ФР

$$F_\gamma(R_m, m = \overline{k,n} : x) = \begin{cases} G_\gamma(-R_{kn}) + \int_{-R_{kn}}^{+\infty} G_\gamma\left(\frac{x - u\lambda_n^{1/\gamma}}{(1-\lambda_n)^{1/\gamma}}\right) dG_\gamma(u) & \text{при} \quad x > -R_k, \\ 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant -R_k. \end{cases}$$

Теорема 5. *При условиях* $A(n)$ *равномерно по* $x \in (-\infty, +\infty)$ *существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\overline{w_k}(t) - s_k(t)}{(\widehat{B}_k(t))^{1/\gamma}} < x \right\} = F_\gamma(R_m, m = \overline{k,n} : x).$$

Теорема 6. Если в условиях теоремы 5 $c_{n+1} = 0$, то равномерно по $x \in (-\infty, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\overline{w_k}(t) - s_k(t)}{(\widehat{B}_k(t))^{1/\gamma}} < x \right\} = \begin{cases} G_\gamma(x) \quad \text{при} \quad x > -R_k \\ 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant -R_k. \end{cases}$$

Условия $B(n)$. Пусть выполнены условия (В.2_k), найдется такое n, $k \leqslant n < r$, что $\rho_{n1} = 1$, существуют пределы (В.6_k) и имеет место (9).

Введем ФР

$$F_\gamma(R_k, R_{kn}, x) = \begin{cases} \widetilde{G}_\gamma(R_{kn}, x) \quad \text{при} \quad x > -R_k \\ 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant -R_k. \end{cases}$$

где

$$\widetilde{G}_\gamma(R_{kn}, x) = G_\gamma(x) - \int_0^1 [G_\gamma - \widetilde{G}_\gamma]\big((x + R_{kn})(1 - w)^{-1/\gamma}\big) d_w G_{1/\gamma}(w R_{kn}^{-\gamma}).$$

Теорема 7. *При условиях* $A(n)$ *равномерно по* $x \in (-\infty, +\infty)$ *существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\overline{w_k}(t) - s_k(t)}{(B_k t)^{1/\gamma}} < x \right\} = F_\gamma(R_k, R_{kn}, x).$$

где

$$R_{kn} = B_n^{-1/\gamma}[M_n + \rho_r \sum_{i=k}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_n}{\rho_i - \rho_r}] \quad \text{и} \quad R_k = B_n^{-1/\gamma} M_n.$$

4°. В условиях (В.2) и $\rho_{r1} \geqslant 1$ опишем предельные распределения вектора

$$(\overline{w_k}(t - \alpha_{2k}), \ldots, \overline{w_k}(t - \alpha_{kk}), \overline{w_k}(t) \quad \text{при} \quad k \leqslant r. \tag{13}$$

Формулировки указывают сходство случаев $\rho_{r1} = 1$ и $\rho_{r1} > 1$.

Пусть существуют пределы

$$\lim_{t\to+\infty} (v_n / t_{nk}) = d_n, \quad n = \overline{2,k}, \tag{14}$$

где $t_{nk} = t - \alpha_{n+1k}$, а последовательность $d_2, \dots, d_k$ имеет $s-1$ единиц на местах с номерами $m_1 < \dots < m_{s-1}$. Множество индексов $\{1, \dots, k\}$ подразделим на группы

$$P_1 = \{1, 2, \dots, m_1-1\}, \quad P_2 = \{m_1, m_1+1, \dots, m_2-1\}, \dots, \quad P_s = \{m_{s-1}, m_{s-1}+1, \dots, k\}.$$

Введем обозначение:

$$\overline{w_r}^*(t) = \frac{w_r(t) - \rho_r t}{(Bt)^{1/\gamma}}.$$

Теорема 8. *При условиях* $\rho_{r1} \geqslant 1$, (B.2) *и* (14) *существует предел*

$$F_\gamma(x_i, d_{i+1}:\ i = \overline{1,k}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\{\overline{w_r^*}(t - \alpha_{jk}) < x_j,\ j = \overline{1,k}\}$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}\{\overline{w_r^*}(t - \alpha_{jk}) < x_j,\ j \in P_i\}$$

где предельная ФР бесконечно дифференцируема по каждой переменной. ФР $F_\gamma(x_j, d_{j+1} : j \in P_i\}$ для групп P_i однотипны: зависят от γ, числа индексов и констант d группы. Опишем ФР одной группы, положив без ограничения общности $P_1 = \{1, 2, \dots, k\}$. Пусть последовательность $d_2, \dots, d_k$ имеет $m-1$ чисел $e_1, \dots, e_{m-1}$ из (0,1) на местах с номерами $r_1 < \dots < r_{m-1}$. Множество индексов $\{1, \dots, k\}$ подразделим на группы $Q_1 = \{1, 2, \dots, r_1\}$, $Q_2 = \{r_1+1, \dots, r_2\}, \dots, Q_{m+1} = \{r_m+1, \dots, k\}$, и положим $(n = \overline{1, m+1})$

$$\gamma_n = \min_{i \in Q_n} x_i.$$

Введем ФР: а) для любого $u > 0$

$$\widetilde{G}^u_\gamma(x) = G_\gamma(x-u) - \int_0^1 [G_\gamma - \widetilde{G}_\gamma](x(1-w)^{-1/\gamma}) d_w G_{1/\gamma}(wu^{-\gamma}), \quad x \geqslant 0;$$

б) для $u \in (-\infty, +\infty)$

$$G^u_\gamma(x) = G_\gamma(x-u), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Пусть $\widetilde{g}^u_\gamma(x)$ и $g^u_\gamma(x)$ — соответствующие плотности и

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} \widetilde{g}_\gamma(x) & \text{при} \quad \rho_{r1} = 1, \\ g_\gamma(x) & \text{при} \quad \rho_{r1} > 1, \end{cases} \qquad f^u_\gamma(x) = \begin{cases} \widetilde{g}^u_\gamma(x) & \text{при} \quad \rho_{r1} = 1, \\ g^u_\gamma(x) & \text{при} \quad \rho_{r1} > 1. \end{cases}$$

Теорема 9. *При условиях* $\rho_{r1} \geqslant 1$, (B.2), (14) *и* $P_1 = \{1, 2, \dots, k\}$.

$$F_\gamma(x_i, d_{i+1}:\ i = \overline{1,k}) = \int_{-\infty}^{\gamma_1} \cdots \int_{-\infty}^{\gamma_{m+1}} f_\gamma(u_1)$$

$$\times \Big\{ \prod_{j=2}^{m+1} e_{j-1}^{-1/\gamma} f_\gamma^{u_{j-1}(e_{j-1}^{-1})^{1/\gamma}} (u_j e_{j-1}^{-1/\gamma}) \Big\} du_1 \cdots du_{m+1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прабху Н. У.* Стохастические процессы теории запасов. М.: Мир, 1984, 184 с.
2. *Сандрян С. Н.* Анализ модели Прабху. Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Ереван: ЕГУ, 1991, 136 с.