ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

Я. М. Агаларов (Москва, ФИЦ ИУ РАН)**. Об одной задаче максимизации дохода СМО типа G/M/1 с пороговой стратегией управления очередью.**

Рассматривается СМО типа G/M/1 с накопителем бесконечной емкости и одним прибором обслуживания, на которую поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения вероятностей $A(t)$. Время обслуживания заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mu > 0$. Поступившая заявка допускается в накопитель системы (занимает любое свободное место в накопителе), если в момент ее поступления число занятых мест в накопителе меньше $k, k > 0$ — некоторое заданное целое число. Такую процедуру доступа заявок в систему называют пороговой стратегией управления доступом (далее для краткости — стратегией). Обозначим стратегию соответствующим пороговым значением k. Если заявка допущена в накопитель, она занимает любое свободное место в накопителе и обслуживается на приборе в порядке поступления. Заявка покидает систему только при завершении обслуживания, освободив одновременно прибор и накопитель, а на освободившийся прибор поступает очередная заявка из накопителя (если таковая есть). Система получает доход в стоимостных единицах, который определяется следующими составляющими:

$C_0 \geqslant 0$ — плата, получаемая системой, если поступившая заявка будет обслужена системой (допущена в накопитель);

$C_1 \geqslant 0$ — величина штрафа, который платит система, если поступившая заявка отклонена;

$C_2 \geqslant 0$ — вычет из дохода системы за единицу времени ожидания заявки в системе;

$C_3 \geqslant 0$ — вычет из дохода системы за единицу времени простоя прибора;

$C_4 \geqslant 0$ — затраты системы в единицу времени на техническое обслуживание системы.

Под доходом системы будем понимать суммарный доход с учетом всех указанных выше составляющих.

Введем обозначения:

$$\overline{v} = \int_0^\infty t\, dA(t),$$

$$r_m = \int_0^\infty \frac{(\mu t)^m}{m!} e^{-\mu t} dA(t) \quad \text{при} \quad m \geqslant 0,$$

$\{\pi_i^k, 0 \leqslant i \leqslant k\}$ — стационарное распределение вероятностей состояний системы при стратегии k (состояние системы — число заявок, находящихся в системе в момент поступления),

$$\overline{W}(k) = \overline{v} - \frac{1}{\mu}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty}(m-i-1)r_m + \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty}(m-k)r_m\right],$$

$$F(k) = \frac{\overline{W}(k)}{\sum_{i=0}^{k-1}\pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m + \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m},$$

$$G(k) = C_0 + \frac{C_3}{\mu} - (C_3+C_4)\overline{v} - C_2 r_0 F(k), \qquad k>0,$$

q_i^k — средний доход, получаемый системой в состоянии i при стратегии $k, i \geqslant 0$,

$Q^k = \frac{\sum_{i=0}^k \pi_i^k q_i^k}{\overline{v}}$ — предельное среднее значение дохода системы в единицу времени.

Предполагается, что $\overline{v} < \infty$, $r_m < \infty$, $m \geqslant 1$.

Ставится задача максимизации функции Q^k на множестве стратегий $k > 0$. Пусть k^* — решение этой задачи (если оно существует).

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:* 1) *если* $\inf_{k>0} G(k) < \sup_{k>0} g^k$, *то при любых значениях параметров* $C_i \geqslant 0$, $i = 0,1,3,4$, $C_2 > 0$ *существует единственная стратегия* $k^* < \infty$, *иначе, если* $g^1 < G(1)$, *то* $k^* = \infty$; 2) *если* $g^1 \geqslant G(1)$, *то* $k^* = 1$; 3) *если* $C_2 = 0$ *и* $g^1 < G(1)$, *то* $k^* = \infty$; 4) *условие* $g^{k-1} < g^k$, $g^{k+1} \geqslant g^k$ *является необходимым и достаточным для* $k = k^*$, $1 < k^* < \infty$.

Из теоремы 1 следует оптимальность порогового значения k^*, получаемого в результате работы следующего алгоритма:

1. Положить $k = 1$.
2. Вычислить $a = g^k$, $b = G(k)$.
3. Если $C_2 = 0$ и $b > a$ то положить $k^* = \infty$ и перейти на пункт 7.
4. Если $a \geqslant b$, то положить $k^* = 1$ и перейти на пункт 7.
5. Вычислить $b = g^{k+1}$.
6. Если $b > a$, то положить $k = k+1$, $a = b$ и перейти на пункт 5, иначе положить $k^* = k$.
7. Конец алгоритма.

Полученные результаты могут быть использованы для поиска оптимальных пороговых стратегий управления потоками в инфокоммуникационных системах, моделируемых с помощью СМО типа G/M/1 (G/M/1/r).

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 15-07-03406).