ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

В. И. Хохлов, **О. В. Висков** (Москва, МИ РАН). **Обобщенное моментное тождество для отрицательного биномиального распределения.**

Подход к решению задачи линеаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно классических распределений, разработанный и успешно примененный для систем (вероятностных) многочленов Эрмита, ортогональных относительно стандартного нормального распределения (см. [4], [7]), и многочленов Пуассона–Шарлье, ортогональных относительно (дискретного) распределения Пуассона (см. [5], [6]), основывался на получении обобщений (характеризационных моментных) тождеств Стейна [9] и Чена [10].

Когда было найдено аналогичное (как оказалось, характеризационное) моментное тождество для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля), опубликованное в [8], появилась надежда, что можно найти некое его обобщение сродни упомянутым обобщениям тождеств Стейна и Чена, дающее возможность применить такой же подход и к решению задачи линеаризации для произведений многочленов, ортогональных относительно отрицательного биномиального распределения $\mathrm{NBi}(r,p)$ (распределения Паскаля) с параметрами $r \in \mathbf{R}$ $(r \in \mathbf{N})$ и $p \in (0,1)$. Напомним, что это распределение определяется выражением

$$\mathbf{P}\{\mathit{\Pi}_{r,p} = \nu\} = \binom{r+\nu-1}{\nu} p^r q^\nu, \quad \text{где} \quad \nu \in \mathbf{N},\ 1-q = p > 0.$$

Предъявим это обобщение.

Утверждение. *Для отрицательного биномиального распределения (распределения Паскаля)*[1] *справедливо следующее моментное тождество*:

$$(\forall g \in \mathbb{G}^{\mathrm{NBi}}) \quad \mathbf{M}\, H_\alpha(\Pi_{r,p})\, g(\Pi_{r,p}) = [r]_\alpha\, q^\alpha\, \mathbf{M} \left(\frac{\Delta}{p\mathcal{I} - q\Delta}\right)^{\alpha} [g(\Pi_{r,p})], \tag{1}$$

где $\Pi_{r,p} \sim \mathrm{NBi}(r,p)$, $\mathbb{G}^{\mathrm{NBi}}$ *есть множество всех ограниченных функций, с которыми* $\mathbf{M}\,|\Delta^\alpha g(\Pi_{r,p})| < \infty$, $[r]_\alpha = r(r+1)\cdots(r+\alpha-1)$, $H_\alpha(x)$ *есть многочлен (Мейкснера) степени* α *из системы многочленов, ортогональных относительно распределения* $\mathrm{NBi}(r,p)$, $\alpha = 0,1,2,\ldots$ *Здесь* $\mathcal{I}$ *есть тождественный оператор*: $\mathcal{I}[f(x)] = f(x)$, Δ *есть оператор взятия разности*: $\Delta[f(x)] = f(x+1) - f(x)$.

Доказательство проводится методом математической индукции, в котором базой ($\alpha = 1$) является установленное в [8] тождество

$$\mathbf{M}\,\Pi_{r,p}\, g(\Pi_{r,p}) = \mathbf{M}\,\widetilde{W}\,[g(\Pi_{r,p})], \quad \text{где} \quad \widetilde{W} = r\,\frac{q}{p}\,\frac{\mathcal{I} + \Delta}{\mathcal{I} - (q/p)\,\Delta}.$$

При проведении шага индуктивного перехода, на котором, не ограничивая общности, можно проверять справедливость доказываемого соотношения на функции $g(x)$, являющейся многочленом $H_\beta(x)$ из этой же системы, используются два особенных свойства, которыми обладает тесно связанный с оператором $\widetilde{W}$ оператор

$$W = \frac{\Delta}{p\mathcal{I} - q\Delta}.$$

[1] А также для геометрического распределения, соответствующего $r = 1$.

Первое из них состоит в том, что его действие на ненормированные многочлены (первого рода)

$$\widetilde{H}_\alpha = \Big([x] - \frac{q}{p}\,[\alpha + r - 1]\Big)^\alpha, \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

ортогональные относительно распределения $\mathrm{NBi}\,(r, p)$, описывается (похожим на правило дифференцирования степенной функции) соотношением

$$W\,\big[\widetilde{H}_\alpha(x)\big] = \alpha\,\widetilde{H}_{\alpha-1}(x) \qquad \alpha = 1, 2, \ldots$$

(использована факториально-степенная запись этих многочленов, см. [1], [2] и [8]). Это соотношение является следствием более общей формулы, приведенной в [3, с. 381] для функций, разлагаемых по этим многочленам.

Второе свойство оператора W состоит в том, что математическое ожидание результата его действия на (убывающую) факториальную степень случайной величины $\Pi_{r,p}$ равно (с точностью до множителя) факториальному моменту этой случайной величины:

$$\mathbf{M}\,W\big[[\Pi_{r,p}]^\alpha\big] = \frac{\alpha}{q\,r}\mathbf{M}\,[\Pi_{r,p}]^\alpha$$

(здесь в левой части охватывающие скобки используются для указания того, к какой функции применяется оператор, а внутренние обозначают убывающую факториальную степень $[x]^\alpha = x(x-1)\cdots(x-\alpha+1)$). □

В больших деталях доказательство утверждения и способ применения тождества (1) к решению задачи линеаризации для произведения многочленов (Мейкснера) будут изложены в отдельной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–594.
2. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения. — Обозрение прикл. и. промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 487–492. (Письмо в редакцию. — Обозрение прикл. и. промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1, с. 207.)
3. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Аналоги неравенства Чернова для отрицательного биномиального распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 379–382.
4. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Обобщенное тождество Стейна и его применение к задаче линеаризации для многочленов Эрмита. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 18, в. 6, с. 833–838.
5. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Многочлены Пуассона–Шарлье и обобщение тождества Чена. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 1, с. 3–8.
6. *Хохлов В.И.*, *Висков О.В.*,*Прохоров Ю.В.* Применение обобщенного тождества Чена к задаче линеаризации для произведений многочленов Пуассона–Шарлье. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3, с. 472–473.
7. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Прямое доказательство обобщенного тождества Стейна. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 5, с. 731–732.
8. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533.
9. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.

10. *Chen L. H. Y.* Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 534–545.