ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2017

В. П. Котельников, А. С. Поляков (Ростов-на-Дону, ВНИИ Градиент). **Определение распределений вероятностей мультипликативных функций по числовым характеристикам коррелированных аргументов.**

Постановка задачи. Пусть x_1, x_2 — произвольно распределенные финитные в интервале (a_i, b_i), $i = 1, 2$, случайные величины, которые могут быть как дискретными, так и непрерывными. Случайные величины имеют конечные математические ожидания $\mathbf{M}\, x_i$ и ковариации $\operatorname{cov}(x_i, x_j)$.

Полагаем, что границы интервалов (a_i, b_i), а также характеристики $\mathbf{M}\, x_i$ и $\operatorname{cov}(x_i, x_j)$ вычислены аналитическим способом или найдены как оценки при обработке результатов опытов. Для мультипликативной функции $X = x_1 x_2$ по числовым характеристикам аргументов необходимо определить предложенное в [1] стьюдентовско-нормальное (SN) семейство индивидуальных распределений с интегральной функцией

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\psi(x)} S_k(t)\, dt, \qquad -\infty < t < \infty, \quad k \geqslant 1,$$

где $S_k(t)$ — плотность стандартного распределения Стьюдента; $\psi(x)$ — функция, обратная к монотонной функции одного случайного аргумента z и четырех параметров (a, b, γ, η) :

$$x = \varphi(z) = a + \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(z-\gamma)/\eta} e^{-\xi^2/2} d\xi, \qquad \eta > 0, \quad -\infty < \gamma < \infty.$$

Преимуществом SN-распределения является большое разнообразие форм. Задачи в такой постановке могут появляться в разных практических приложениях.

Решение. Для мультипликативной функции X определяем границы интервала изменения: $a = a_1 a_2$, $b = b_1 b_2$. Используем существующую теорему для математического ожидания $M = \mathbf{M}\, x_1 x_2 = \mathbf{M}\, x_1 \mathbf{M}\, x_2 + \operatorname{cov}(x_1, x_2)$ и непосредственно проверяемое для дисперсии соотношение

$$\begin{aligned} D = \mathbf{D}\, x_1 x_2 = \mathbf{D}\, x_1 \mathbf{D}\, x_2 + \operatorname{cov}^2(x_1, x_2) + \big[\mathbf{D}\, x_2 (\mathbf{M}\, x_1)^2 \\ + \mathbf{D}\, x_1 (\mathbf{M}\, x_2)^2 + 2 \operatorname{cov}(x_1, x_2) \mathbf{M}\, x_1 \mathbf{M}\, x_2\big]. \end{aligned}$$

Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} M = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(t-\gamma)/\eta} e^{-\xi^2/2} d\xi\right] S_k(t)\, dt, \\ D = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(t-\gamma)/\eta} e^{-\xi^2/2} d\xi - M\right]^2 S_k(t)\, dt, \end{cases}$$

и решаем ее по переменным (η, γ, k) методом, приводящим к минимальной ошибке. Например, в среде Mathcad решаем ее с использованием встроенной функции $\mathrm{MinErr}\,(\eta, \gamma, k)$. Найденная совокупность параметров характеризует выявленную функцию распределения $G(x; a, b, \eta, \gamma, k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котельников В. П.* Математическая модель стьюдентовско-нормального распределения случайных величин и ее применения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2016, т. 23, в. 1, с. 48–49.