**ОБОЗРЕНИЕ**
**ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ**
**Том 24** **МАТЕМАТИКИ** **Выпуск 3**
**2017**

**А. В. Калинкин**, **Л. В. Туркина** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Спектральное представление переходных вероятностей для марковского ветвящегося процесса $\mathbf{T \to 0, 2T}$.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели линейного типа $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде

$$P_{i,i-1}(t) = p_0 \lambda i t + o(t), \quad P_{ii}(t) = 1 - \lambda i t + o(t), \quad P_{i,i+1}(t) = p_2 \lambda i t + o(t),$$

где $p_0 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_0 + p_2 = 1$ ($\lambda > 0$). Далее $p_2 > p_0 \geqslant 0$, случай $p_0 > p_2 > 0$ аналогичен, случай $p_2 = p_0$ рассмотрен в другой работе. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{i=0}^{\infty} (z^i / i!) F_i(t; s)$, $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j$, $|s| < 1$, удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова [4]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z \Big( p_2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} + p_0 \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \Big), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (p_2 s^2 + p_0 - s) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}, \quad \mathcal{F}(0; z, s) = e^{zs}. \tag{1}$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) ищем в виде ряда с тремя разделенными переменными

$$\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \widetilde{C}_n(z) C_n(s) e^{-\lambda_n t}. \tag{2}$$

Подставляя ряд (2) в уравнения (1), получаем дифференциальные уравнения

$$\lambda z (p_2 \widetilde{C}_n''(z) - \widetilde{C}_n'(z) + p_0 \widetilde{C}_n(z)) + \lambda_n \widetilde{C}_n(z) = 0, \quad \lambda (p_2 s^2 - s + p_0) C_n'(s) + \lambda_n C_n(s) = 0.$$

Решение второго уравнения $C_n(s) = ((p_2 s - p_0)/(p_2 s - p_2))^{\lambda_n / ((p_2 - p_0)\lambda)}$. Рассматриваемые функции аналитические в области $|s| < 1$, поэтому $\lambda_n = (p_2 - p_0) n \lambda$. Тогда

$$C_n(s) = \Big( \frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} \Big)^n, \quad \widetilde{C}_n(z) = \frac{1}{n!} z e^z \frac{d^n}{dz^n} \Big( z^{n-1} e^{\frac{p_0 - p_2}{p_2} z} \Big)$$

(если $p_2 = 1$, то $\widetilde{C}_n(z)$ есть многочлен Лагерра $L_n^{(-1)}(z)$ [5]). Получаем

$$\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \widetilde{C}_n(z) \Big( \frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} \Big)^n e^{-(p_2 - p_0) n \lambda t}.$$

При начальном условии $t = 0$ имеем равенство

$$e^{zs} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \widetilde{C}_n(z) \Big( \frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} \Big)^n.$$

Отсюда $A_n = 1$, учитывая формулы суммирования (ср. формулу 10.12 (17) [5]), $|s| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n(z) s^n = \exp\Big(z\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2}\Big), \ e^{zs} = \exp\Big(z\frac{p_2\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} - p_0}{p_2\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} - p_2}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n(z)\Big(\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2}\Big)^n.$$

**Теорема** [3]. *Двойная производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n(z)\Big(\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2}\Big)^n e^{-(p_2 - p_0) n\lambda t}, \quad p_2 > p_0 \geqslant 0, \quad |s| < 1. \tag{3}$$

Отсюда следует спектральное представление для переходных вероятностей процесса $\xi(t)$, найденное в работе [1], см. пример в главе IV. Ряд (3) суммируется,

$$\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n(z)\Big(\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} e^{-(p_2 - p_0)\lambda t}\Big)^n = \exp\Big(z\frac{p_2\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} e^{-(p_2 - p_0)\lambda t} - p_0}{p_2\frac{p_2 s - p_0}{p_2 s - p_2} e^{-(p_2 - p_0)\lambda t} - p_2}\Big). \tag{4}$$

Из определения функции $\mathcal{F}(t; z, s)$ и разложения функции (4) по $z$, получаем

**Следствие** [2]. *Для процесса рождения и гибели линейного типа $\xi(t)$ имеет место свойство ветвления переходных вероятностей*

$$F_i(t; s) = F_1^i(t; s), \ i = 0, 1, \ldots, \ F_1(t; s) = \frac{p_0(1 - e^{(p_0 - p_2)\lambda t}) - s(p_0 - p_2 e^{(p_0 - p_2)\lambda t})}{p_2 - p_0 e^{(p_0 - p_2)\lambda t} - s p_2(1 - e^{(p_0 - p_2)\lambda t})}. \tag{5}$$

Метод нахождения представления двойной производящей функции через дискретный спектр и вывода нелинейного свойства (5) может быть перенесен на марковский процесс рождения и гибели квадратичного типа $2T \to T, 3T$ ( $p_1 \neq p_3$ ) [3], [4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Lederman W.*, *Reuter G. E. H.* Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes. — Phil. Trans. of the Royal Sotiety of London. Ser. A, 1954, v. 246, p. 321–369.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
3. *Туркина Л. В.* Решение уравнений Колмогорова для марковских процессов рождения квадратичного типа. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008, 99 с.
4. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
5. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974, 296 с.