



**А. В. Калинин, А. Е. Макаров** (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Решение Н. Беккера для уравнения марковского процесса эпидемии  $T_1 + T_2 \rightarrow T_1$ ;  $T_1 \rightarrow 0, 2T_1$ .**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ ,  $t \in [0, \infty)$ , на множестве состояний  $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\}$ , переходные вероятности  $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$  которого при  $t \rightarrow 0+$  представимы в виде ( $p_0 > 0$ ,  $p_2 > 0$ ,  $p_0 + p_2 = 1$ ;  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ )

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = p_2 \alpha_1 \lambda_1 t + o(t), \quad P_{(\alpha_1-1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = p_0 \alpha_1 \lambda_1 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \alpha_1 \alpha_2 \lambda_2 t + o(t), \quad P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 1 - (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_1 \alpha_2 \lambda_2) t + o(t),$$

Производящая функция переходных вероятностей  $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}$ ,  $|s_1| \leq 1$ ,  $|s_2| \leq 1$ , удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [?]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial t} = \lambda_2 (s_1 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1 (p_2 s_1^2 + p_0 - s_1) \frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_1},$$

с начальным условием  $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$ . Из рассмотрения скачков процесса следует, что функция  $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)$  является многочленом степени  $\alpha_2$  по  $s_2$ ; т.е.

$$F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{r=0}^{\alpha_2} \frac{(s_2 - 1)^r}{r!} H_r(t; s_1), \quad H_r(t; s_1) = \frac{\partial^r F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, 1)}{\partial s_1^r}, \quad (1)$$

Следуя [?], подставляем сумму (??) в уравнение Колмогорова и получаем уравнения

$$\frac{\partial H_r(t; s_1)}{\partial t} = (p_2 \lambda_1 s_1^2 - (\lambda_1 + r \lambda_2) s_1 + p_0 \lambda_1) \frac{\partial H_r(t; s_1)}{\partial s_1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \alpha_2, \quad (2)$$

с условиями  $H_0(t; s_1) = s_1^{\alpha_1}$  и  $H_r(t; s_1) = \alpha_2(\alpha_2 - 1) \dots (\alpha_2 - r + 1) s_1^{\alpha_1}$ ,  $r = 1, 2, \dots, \alpha_2$ . Частные решения линейных уравнений в частных производных первого порядка (??) находим методом характеристического уравнения [?],

$$H_0(t; s_1) = \left( \frac{p_0(1 - e^{(p_0 - p_2)\lambda_1 t}) - s_1(p_0 - p_2 e^{(p_0 - p_2)\lambda_1 t})}{p_2 - p_0 e^{(p_0 - p_2)\lambda_1 t} - s_1 p_2(1 - e^{(p_0 - p_2)\lambda_1 t})} \right)^{\alpha_1}, \quad p_0 \neq p_2,$$

$$H_0(t; s_1) = \left( 1 - \frac{1 - s_1}{(\lambda t/2)(1 - s_1) + 1} \right)^{\alpha_1}, \quad p_0 = p_2;$$

$$H_r(t; s_1) = \alpha_2(\alpha_2 - 1) \dots (\alpha_2 - r + 1) \left( \frac{\varepsilon_r s_1 - (q_r + \varepsilon_r)(s_1 - q_r)(1 - e^{-\varepsilon_r p_2 \lambda_1 t})}{\varepsilon_r - (s_1 - q_r)(1 - e^{-\varepsilon_r p_2 \lambda_1 t})} \right)^{\alpha_1},$$

$r = 1, 2, \dots, \alpha_2$ , где  $q_r$  — меньший корень квадратного уравнения  $p_2 \lambda_1 s_1^2 - (\lambda_1 + r \lambda_2) s_1 + p_0 \lambda_1 = 0$ ,  $0 < q_r < 1$ , и  $\varepsilon_r$  — разность между большим и меньшим корнями уравнения.

Состояния  $\{(0, \gamma_2), \gamma_2 = 0, 1, \dots\}$  являются поглощающими; вероятности останова процесса равны  $q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)$ . Вводим производящую функцию  $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s_2) = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} s_2^{\gamma_2}$ , и  $\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)$ . Переходя в найденном явном выражении (??) к пределу при  $t \rightarrow \infty$ , получаем утверждение.

**Теорема.** Производящая функция финальных вероятностей равна

$$\Phi_{(\alpha_1, \alpha_2)}(s_2) = \sum_{r=0}^{\alpha_2} (s_2 - 1)^r C_{\alpha_2}^r q_r^{\alpha_1}, \quad q_0 = \min\{1, p_0/p_2\}. \quad (3)$$

Состояние  $(\alpha_1, \alpha_2)$  интерпретируется как наличие  $\alpha_1$  особей типа  $T_1$  (зараженные),  $\alpha_2$  особей типа  $T_2$  (восприимчивые); марковский процесс  $(\xi_1(t), \xi_2(t))$  есть модель эпидемии с размножением переносчиков [?]. В [?], для случая эпидемии Вейса ( $p_0 = 1$ ), сумма (??) сведена к интегральному выражению и установлена предельная теорема при  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  для числа оставшихся восприимчивых особей. В работе [?] аналогичным образом найдено решение второго уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии с иммиграцией переносчиков  $T_1 + T_2 \rightarrow T_1$ ;  $T_1 \rightarrow 0$ ;  $0 \rightarrow T_1$  (см. также [?]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Becker N. G. Interactions between species: Some comparisons between deterministic and stochastic models. — Rocky Mountain J. Math., 1973, v. 3, № 1, p. 53–68.
2. Макаров А. Е. Решение уравнений Колмогорова для марковского процесса со схемой взаимодействий  $T_1 + T_2 \rightarrow T_1$ ;  $T_1 \rightarrow 0$ ;  $0 \rightarrow T_1$ . Сборник тезисов докладов общеуниверситетской научной конференции «Студенческая научная весна-2011». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, т. 11, часть 1, с. 129–131.
3. Калинин А. В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 773–780.
4. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М: Либроком, 2009, 240 с.