ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2017

**Я. М. Агаларов** (Москва, ФИЦ ИУ РАН). **Максимизация среднего стационарного дохода в единицу времени СМО типа $M|G|1$.**

Рассматривается СМО типа $M|G|1$ с накопителем бесконечной емкости и одним прибором обслуживания, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda > 0$, а время обслуживания каждой заявки распределено по произвольному закону $H(t)$. Поступившая заявка допускается в накопитель системы (занимает любое свободное место в накопителе), если в момент ее поступления число занятых мест в накопителе меньше $k$, $k > 0$ — некоторое заданное значение (тривиальный случай $k = 0$ не рассматривается), а в противном случае она отклоняется (не допускается в систему). В дальнейшем обозначение $k$ будем называть порогом, а его значение пороговым значением. Если заявка допущена в накопитель, она занимает любое свободное место в накопителе и обслуживается на приборе в порядке поступления. Заявка покидает систему только при завершении обслуживания, освободив одновременно прибор и накопитель, а на освободившийся прибор поступает очередная заявка из накопителя (если таковая есть). Система получает доход, который определяется следующими составляющими:

$C_0(v) \geqslant 0$ — плата, получаемая системой, если поступившая заявка обслужена системой, где $v$ — время занятия прибора заявкой, $\overline{C}_0 = \int_0^\infty C_0(v)\, dH(v) < \infty$;

$C_1 \geqslant 0$ — величина штрафа, если поступившая заявка отклонена;

$C_2 \geqslant 0$ — величина штрафа за единицу времени ожидания заявки в очереди к прибору;

$C_3 \geqslant 0$ — величина штрафа за единицу времени простоя прибора;

$C_4 \geqslant 0$ — затраты системы в единицу времени на техническое обслуживание системы.

Будем считать, что плату за обслуживание система получает в момент завершения обслуживания каждой заявки в зависимости от длины заявки (длительности занятия прибора).

Введем обозначения:

$i$ — состояние вложенной цепи Маркова, в которой переходы цепи определяются моментами окончания обслуживания и состояние системы есть число заявок, остающихся в ней в момент ухода с прибора обслуженной заявки;

$\pi_i^k$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, — стационарное распределение вероятностей системы при пороге $k$ ($\pi_i^k$ — вероятность того, что система находится в состоянии $i$);

$g^k$ — значение суммарного предельного дохода, усредненного по числу обслуженных заявок;

$q_i^k$ — средний доход, получаемый системой в состоянии $i$ при пороге $k$, $i \geqslant 0$;

$\overline{v} = \int_0^\infty t\, dH(t)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $i$, $0 < \overline{v} < \infty$, $\rho = \lambda\overline{v}$ — входная нагрузка.

Значение стационарного дохода, усредненного по числу обслуженных заявок, при пороге $k$ равно [1]:

$$g^k = \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k q_i^k.$$

Среднее значение стационарного дохода системы в единицу времени при пороге $k$ составляет [1]:

$$Q^k = \lambda(1-\theta_k^k)g^k,$$

где $\theta_k^k$ — вероятность того, что поступившая заявка будет допущена в систему.

Ставится задача: найти оптимальное пороговое значение $k^* > 0$, такое что

$$\max_{k>0} Q^k = Q^{k^*}. \tag{1}$$

Пусть

$$G(k) = \frac{\overline{C}_0}{\overline{v}} + C_1\frac{1-\rho}{\overline{v}} - \frac{C_2}{\lambda\overline{v}}[r_0F(k) + k\rho - 1] - C_4,$$

где $F(k) = 1/(\pi_k^{k+1})(\pi_0^{k+1} + \rho - 1) - (\rho + r_0 - 1)$.

Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *При любых значениях параметров* $0 \leqslant C_0(v) < \infty$, $0 \leqslant C_j < \infty$, $j = 1,\ldots,4$, $0 < C_2 < \infty$ *существует оптимальный порог* $0 < k^* < \infty$, $k^* = \min\{k > 0 : G(k) \leqslant Q^k\}$. *При этом если* $Q^1 \geqslant G(1)$, *то* $k^* = 1$, *а если* $C_2 = 0$ *и* $Q^1 < G(1)$, *то* $k^* = \infty$.

**Теорема 2.** *Пороговое значение* $k^*$ *является решением задачи* (1) *тогда и только тогда, когда* $k^*$ *удовлетворяет одному из трех условий*:

1. $G(1) \leqslant Q^1$, $k^* = 1$.
2. $G(1) > Q^1$, $k^* = \min\{k > 0 : G(k) \leqslant Q^k\}$.
3. $Q^{k^*-1} < Q^{k^*}$, $Q^{k^*+1} < Q^{k^*}$, $1 < k^* < \infty$.

Предлагается алгоритм решения задачи (1), основанный на условии 2 теоремы 2 :

1. Положить $k = 1$.
2. Вычислить $G(k)$ и $Q^k$.
3. Если $C_2 = 0$ и $Q^k < G(k)$, то положить $k^* =$ «$\infty$» и перейти к пункту 8.
4. Перейти к пункту 7, если выполняется неравенство $G(k) \leqslant Q^k$.
5. Увеличить $k$ на единицу.
6. Вычислить $G(k)$, $Q^k$ и перейти к пункту 4.
7. Положить $k^* = k$.

Конец алгоритма.

Результаты работы могут быть использованы при исследовании и разработке эффективных пороговых стратегий управления в системах с очередями.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президиума РАН I.33П (проект № 0063-2016-0015 Госзадания ФИЦ ИУ РАН).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаларов Я. М.*, *Агаларов М. Я.*, *Шоргин В. С.* Об оптимальном пороговом значении длины очереди в одной задаче максимизации дохода СМО типа $M|G|1$. — Информатика и ее применения, 2016, т. 10, в. 2, с. 70–79.