ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2017

**В. А. Пухлий, С. Т. Мирошниченко, О. Г. Лепеха, А. А. Журавлев** (Севастополь, СГУ). **К расчету роторов турбодетандеров модифицированным методом последовательных приближений.**

В предыдущих работах проф. В. А. Пухлия [1, 2] был изложен модифицированный метод последовательных приближений применительно к решению краевых и начальных задач математической физики, при этом, в работе [2] рассматривался вопрос ускорения сходимости решения, основанный на использовании метода телескопического сдвига степенных рядов К. Ланцоша [3] с использованием ортогональных многочленов Чебышева.

Авторы на основе данного подхода исследовали прочность роторов радиальных и осевых турбодетандеров, состоящих из конических дисков переменной жесткости и рабочих лопаток, представляющих собой пологие непрямоугольные в плане оболочки переменной жесткости.

Решение краевой задачи для дисков роторов турбодетандеров переменной жесткости основывалось на полученных проф. В. А. Пухлием нелинейных уравнениях в осесимметричной постановке [4]. Разрешающая система шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка записывается относительно деформационных приращений радиальной и осевой координат срединной поверхности оболочки, при этом в уравнениях равновесия используются радиальные и осевые усилия. При таком подходе упрощается вид интеграла уравнений равновесия, следующего из уравнения равновесия конечной отсеченной части оболочки. Уравнения равновесия получены в самом общем случае при произвольном законе изменения толщины конического диска и произвольном нагружении, в том числе и в произвольном температурном поле. Определялось напряженно-деформированное состояние основного и покрывающего дисков.

Напряженно-деформированное состояние лопатки турбодетандера радиального типа(рис. 1. а) описывается линейными уравнениями теории пологих оболочек Маргерра относительно нормального перемещения $w(x, y)$ и функции напряжений $F(x, y)$:

$$D \bigtriangledown^4 - \frac{h}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = q - p\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \bigtriangledown^4 F + \frac{E}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -(1-\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Здесь $R$ и $h$ — радиус срединной поверхности и толщина лопатки; $E$ и $D$ — модуль упругости и цилиндрическая жесткость лопатки; $q$ и $p_x = \partial U/\partial x$ — нормальная и тангенциальная компоненты центробежной силы элемента лопатки; $\bigtriangledown^4$ — бигармонический оператор.

Лопатка по краям $y_1 = k_1 x + b_1 = r$ и $y_2 = k_2 x + b_2 = \alpha r$ свободно защемлена. Граничные условия для прогиба и функции напряжения запишутся в виде

$$W = \frac{\partial W}{\partial n} = 0, \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0. \tag{2}$$

К решению краевой задачи, описываемой системой уравнений (1) и граничными условиями (2), применяется метод интегральных соотношений Дородницына [5]. В соответствии с методом решение представляется в виде:

$$\overline{W}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi, \eta) X_i(\xi), \quad \overline{F}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(\xi, \eta) X_j(\xi). \tag{3}$$

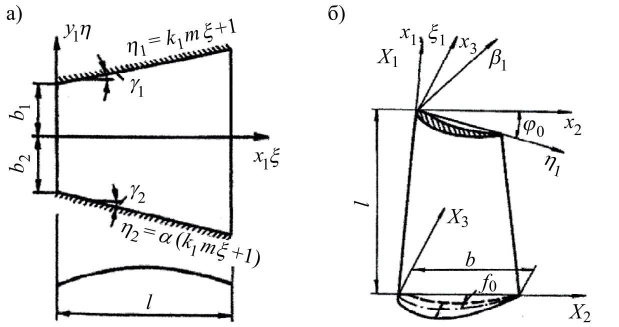


Рис. 1. Геометрия и система координат рабочих лопаток турбодетандеров: а) радиального типа; б) осевого.

Здесь $\varphi_i(\xi,\eta)$ и $\psi_j(\xi,\eta)$ — системы аппроксимирующих функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи: $X_i(\xi)$ и $X_j(\xi)$ – искомые функции; $\xi = x/l$ и $\eta = y/b_1$ — безразмерные координаты.

Применяя алгоритм метода интегральных соотношений к уравнениям (1), получим разрешающую систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными координатами в общем случае неэйлеровского типа:

$$X_m^{IV} = \sum_{\nu=l}^{m^*} \sum_{i=0}^{3} A_{\nu,i}^m X_\nu^i + \varphi_m. \tag{4}$$

Здесь $\nu$ — номер неизвестной функции, при которой стоит коэффициент $A_{\nu,i}^m$; $m$ — номер уравнения; $i$ — порядок производной от неизвестной функции.

В дальнейшем интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами осуществляется модифицированным методом последовательных приближений [1, 2].

Вывод уравнений равновесия и естественных граничных условий для лопаток осевого турбодетандера (рис. 1, б) проводится на основе вариационного принципа Лагранжа, согласно которому:

$$-\delta\Pi + \delta A_1 + \delta A_2 = 0. \tag{5}$$

Здесь $\delta\Pi$ — вариация работы внутренних сил; $\delta A_1$ — вариация работы внешней нагрузки, приложенной к поверхности лопатки; $\delta A_2$ — вариация работы внешних контурных усилий. Далее

$$\begin{aligned} &\int_0^l \int_0^b \left\{ \left(L_1 + p_1\right)\delta u_1 + \left(L_2 + p_2\right)\delta u_2 + \left(L_3 - q\right)\delta w \right\} d\,\xi_1\, d\,\eta_1 \\ &- \int_0^l J_1^* d\,\xi_1 \Big|_0^b - \int_0^b J_2^* d\,\eta_1 \Big|_0^l - \left(M_{11} + M_{22} - 2M_{12}\right)\delta w \Big|_0^l \Big|_0^b = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Первый интеграл в выражении (6) доставляет дифференциальные уравнения задачи, второй и третий — граничные условия.

В дальнейшем используется алгоритм решения задачи, изложенной выше.

**Решение систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в смещенных полиномах Чебышева.** Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\,X_m}{d\,\xi} = \sum_{\nu=l}^{s} B_{\nu,m} X_\nu + f_m, \quad m = 1, 2, \ldots n. \tag{7}$$

Здесь $X_m$ — неизвестные безразмерные функции; $B_{\nu,m}$ — переменные коэффициенты; $\xi$ — безразмерная координата; $\nu$ — номер неизвестной функции, при которой стоит коэффициент $B_{\nu,m}$ ; $m$ — номер уравнения.

В соответствии с методом, переменные коэффициенты $B_{\nu,m}$ и свободные члены $f_m$ представлены через смещенные полиномы Чебышева:

$$B_{\nu,m} = \sum_{r=0}^{q} b_{\nu,m,r} \cdot d_r^{-1} \sum_{k=0}^{r} a_k T_k^*(\xi); \quad f_m = \sum_{r=0}^{q} f_{m,r}(d_r \cdot r\,!)^{-1} \sum_{k=0}^{r} a_k T_k^*(\xi). \tag{8}$$

Здесь $q$ — степень интерполяционного полинома; $a_k$ — коэффициенты разложения $\xi^r$ в ряд по многочленам Чебышева в выражениях (8), $d_r = 1$ для $r = 0$ и $d_r = 2^{2r-1}$ для остальных $r$ .

Общее решение системы уравнений (7) имеет вид

$$\begin{aligned} X_m \; = \; & \sum_{\mu=1}^{s} C_\mu \left[ d_0^{-1}\, a_0\, T_0^*(\xi)\delta + \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,\mu,n} \right] \\ & + \sum_{j=0}^{q} t_{m,j,0} \big[ d_{j+1}(j+1)\,! \big]^{-1} \sum_{k=0}^{j+1} a_k T_k^*(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} X_{m,n}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $t_{m,j,0} = f_{m,r}$ при $j = r$ ; $\mu$ — номер фундаментальной функции; $C_\mu$ — постоянные интегрирования. В решении (9) будет $\delta = 1$ , если $m = \mu$ и $\delta = 0$ , для остальных $\mu$ .

Первое приближение $X_{m,\mu,1}$ получается из подстановки нулевого приближения в правую часть однородной системы: $d_0^{-1} a_0\, T_0^*(\xi)\delta$ подставляем в

$$\frac{d\,X_m}{d\,\xi} = \sum_{\nu=1}^{s} B_{\nu,m} X_\nu.$$

Последующие приближения осуществляются по формулам:

$$\begin{aligned} X_{m,\mu,n} \; &= \; \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,\mu,n} \big[ d_{n+j-1}(n+j-1)\,! \big]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k\, T_k^*(\xi); \\ X_{m,n} \; &= \; \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,n,j} \big[ d_{n+j-1}(n+j-1)\,! \big]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k\, T_k^*(\xi), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\beta = n(q+3) - 2$.

Коэффициенты $t_{m,\mu,n,j}$ и $t_{m,n,j}$ определяются через коэффициенты предыдущего приближения по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} t_{m,\mu,n,j} \; &= \; \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{r=0}^{q} b_{\nu,m,r} \cdot t_{\nu,\mu,n-1,j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^{r} (n+j-1-\gamma); \\ t_{m,n,j} \; &= \; \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{r=0}^{q} b_{\nu,m,r} \cdot t_{\nu,n-1,j-r} (n+j)^{-1} \prod_{\gamma=0}^{r} (n+j-\gamma). \end{aligned}$$

Постоянные $C_\mu$ , входящие в общее решение системы уравнений (9), находятся из граничных условий.

Вышеизложенный подход применяется к расчетам дисков турбодетандеров переменной жесткости и воздействии стационарного температурного поля общего вида в осесимметричной постановке, а также к расчетам лопаток турбодетандеров радиального и осевого типа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пухлий В. А.* Решение начально–краевых задач математической физики модифицированным методом последовательных приближений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2017, т. 24, № 1, с. 33–44.
2. *Пухлий В. А.* Об ускорении сходимости решения в модифицированном методе последовательных приближений. — Обозрение прикл. и промышл. матем. 2016, т. 23, № 4, с. 381–383.
3. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М: Физматгиз, 1961, с. 524.
4. *Пухлий В. А.* К расчету сопряженных оболочек переменной жесткости. — Прикладная механика, 1989, т. 25, № 11, с. 31–37.
5. *Дородницын А. А.* Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. — В кн.: Труды Третьего Всероссийского математического съезда, М.: Наука, 1958 т. 3, с. 447–453.