О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 24 — М А Т Е М А Т И К И — В ы п у с к 1
2017

Т. А. Б е л к и н а, Н. Б. К о н ю х о в а, Б. В. С л а в к о (Москва, ЦЭМИ РАН; ВЦ ФИЦ ИУ РАН; НИУ ВШЭ). **О вероятности неразорения в дуальной модели коллективного риска с вложением капитала в безрисковый актив.**

Рассматривается задача о вероятности неразорения (ВНР) для коллективной модели пенсионного страхования (так называемой дуальной модели риска [1]) в условиях инвестирования всего текущего капитала (ТК) страховой компании (СК) в безрисковый актив — банковский счет с постоянной процентной ставкой. Типичный договор страхования в данной модели предполагает пожизненное обеспечение страхователя в обмен на передачу права наследования его собственности в пользу СК, по этой причине в [2] она также называется моделью аннуитета в страховании жизни (life annuity insurance model). Модель рассматривается как дуальная по отношению к классической модели Крамéра–Лундберга (КЛ). Динамика ТК (по данному портфелю договоров) описывается процессом риска вида

$$R_t = u - ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь R_t — размер капитала в момент времени $t \geqslant 0$, u — размер начального капитала (НК), $0 < c$ — размер затрат на выплату пенсий в единицу времени, $N(t)$ — однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ ($\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), описывающий количество поступивших премий к моменту времени t; Z_k ($k = 1, 2, \ldots$) — размеры премий — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, не зависящие от процесса $N(t)$ и имеющие функцию распределения $F(z)$ ($F(0) = 0$, $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$).

Пусть весь капитал фонда постоянно держится на банковском счете, эволюция которого описывается ОДУ $dB_t = rB_t\,dt$, $t \geqslant 0$, где B_t — величина банковского счета в момент времени t при постоянной процентной ставке $r > 0$. Тогда динамика капитала X_t (результирующий процесс риска) описывается начальной задачей для стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = r\,X_t\,dt + dR_t, \quad t \geqslant 0, \qquad X_0 = u, \tag{2}$$

где R_t определено в (1). Положим $\varphi(u) = \mathbf{P}\{X_t \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \,|\, X_0 = u\}$, тогда $\varphi(u)$ определяет ВНР на бесконечном интервале времени. Элементарно может быть доказана следующая

Лемма 1. *Для ВНР $\varphi(u)$ процесса (2) справедливы соотношения: $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(u) \equiv 1$ при $u \geqslant c/r$, т. е. при нулевом начальном состоянии $u = 0$ разорение неминуемо, а при $u \geqslant c/r$ разорение невозможно.*

Таким образом, целью работы является изучение влияния безрисковых инвестиций на ВНР при НК u, находящемся в интервале $[0, c/r]$; кроме того, предполагается сравнить его с влиянием рисковых инвестиций, изученном в [3]. Для ВНР $\varphi(u)$, рассматриваемой на всей неотрицательной полуоси, в предположении дифференцируемости этой функции на интервале $(0, c/r)$, можно получить интегродифференциальное уравнение (ИДУ) первого порядка с невольтерровым интегральным оператором и вырождением в точке $u = u_{\text{sing}} = c/r > 0$:

$$(ru - c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda \int_0^\infty \varphi(u + z)\, dF(z) = 0, \qquad u > 0. \tag{3}$$

Это ИДУ является «вырожденным» по отношению к более общему сингулярному ИДУ второго порядка для той же исходной модели риска (1) в условиях вложения всего ТК (или фиксированной его части) в рисковый актив [3].

Следующие утверждения касаются некоторых свойств решений ИДУ (3): единственности решения, удовлетворяющего определенным условиям, а также связи такого решения (при условии его существования) с ВНР в рассматриваемой модели.

Лемма 2. *Пусть в ИДУ* (3) *все параметры* c, r, λ — *фиксированные положительные числа, и пусть существует решение* $\varphi(u)$ *этого ИДУ, непрерывно дифференцируемое на* $(0, c/r)$ *и такое, что* $\varphi(u) = 1$ *при* $u \geqslant c/r$,

$$\lim_{u \to +0} \varphi(u) = 0, \qquad \lim_{u \to c/r - 0} \varphi(u) = 1. \tag{4}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:
(1) *такое решение единственно*;
(2) *имеет место ограничение* $0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1$, $u \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда для любого* $u \in \mathbf{R}_+$ *значение* $\varphi(u)$ *определяет ВНР для процесса* $X_t(u)$, *определенного в* (2).

Утверждения такого типа, как теорема 1, мы называем теоремами достаточности [4]; они сводят задачу исследования ВНР (в частности, проблемы ее дифференцируемости) к проблеме существования решения некоторых корректно поставленных задач для ИДУ и исследования свойств решений этих задач. [1)]

В качестве примера приводятся результаты исследования ВНР в случае экспоненциального распределения размеров поступлений, т. е. когда в (3) будет

$$F(z) = 1 - \exp{(-z/m)}, \quad m > 0, \quad dF(z) = (1/m) \exp{(-z/m)}\, dz. \tag{5}$$

Тогда, в частности, невольтерров интегральный оператор в ИДУ (3) приобретает вид сингулярного вольтеррова оператора заменой переменной интегрирования $z = s - u$:

$$(J_m\varphi)(u) = \frac{1}{m} \int_u^\infty \varphi(s) \exp\bigl(-(s-u)/m\bigr)\, ds, \quad u \geqslant 0.$$

С учетом этого обозначения получаем из (3) окончательное сингулярное ИДУ

$$(ru - c)\, \varphi'(u) - \lambda\, \varphi(u) + \lambda\, (J_m\varphi)(u) = 0, \qquad u \geqslant 0. \tag{6}$$

З а м е ч а н и е 1 (случай $r = 0$). Модель без инвестиций описывается исходным процессом риска (1), где c, λ, m — положительные числа. В случае справедливости (5) и положительности нагрузки безопасности, т.е. когда

$$\lambda m > c, \tag{7}$$

[1)] Отметим, что в соответствующем утверждении о ВНР в работе [3] для случая вложения капитала в рисковый актив допущена некоторая неточность: в условия теоремы 2 должно быть добавлено требование $\lim_{u \to +0} \varphi(u) = 0$.

для соответствующей ВНР $\varphi_0(u)$ (как и в модели КЛ с заменой неравенства (7) на противоположное [2]), имеем аналитическое решение [3]:

$$\varphi_0(u) = 1 - \exp\Big(-(\lambda m - c)\, u/(c\, m)\Big), \quad u \in \mathbb{R}_+; \tag{8}$$

при нарушении неравенства (7) будет $\varphi_0(u) \equiv 0$. Функция (8) удовлетворяет ИДУ (6) (при $r = 0$) и условиям $\lim_{u\to+0} \varphi(u) = 0$, $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1$, $0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1$, $u \in \mathbb{R}_+$.

Далее, учитывая соотношение $[(J_m\varphi)(u)]'_u = [(J_m\varphi)(u) - \varphi(u)]/m$ и обозначив $\psi(u) = \varphi'(u)$, дифференцируем исходное ИДУ (6) и берем линейную комбинацию полученного ИДУ и исходного, приводящую к исключению интегрального слагаемого. В результате получим сингулярное ОДУ первого порядка:

$$(ru - c)\,\psi'(u) + \big[r - \lambda - (ru - c)/m\big]\,\psi(u) = 0, \quad u \geqslant 0.$$

Из семейства нетривиальных решений этого ОДУ, определенных на интервале $[0, c/r]$, которые определяются явно с точностью до постоянного множителя, выделим нужное решение $\psi(u)$ условием нормировки $\int_0^{c/r} \psi(s)\, ds = 1$. Тогда получим

$$\psi(u) = \left[\int\limits_0^{c/r} (c/r - u)^{\lambda/r - 1} \exp(u/m)\, du\right]^{-1} (c/r - u)^{\lambda/r - 1} \exp(u/m), \tag{9}$$

а функцию $\varphi(u)$ на интервале $[0, c/r)$ определим формулой

$$\varphi(u) = 1 - \int\limits_u^{c/r} \psi(s)\, ds, \quad 0 \leqslant u \leqslant c/r. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что функция, определенная в (10) для $u \in [0, c/r)$, где $\psi(u)$ имеет вид (9), и равная единице при $u \geqslant c/r$, удовлетворяет ИДУ (6) и условиям (4). Тогда следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть в ИДУ* (6) *все параметры* c, m, r, λ *— фиксированные положительные числа. Тогда ВНР* $\varphi(u)$ *процесса* (2) *на интервале* $[0, c/r)$ *имеет вид* (10), *где* $\psi(u)$ *определяется формулой* (9).

З а м е ч а н и е 2. Заметим из (9), что при $u \to +0$ решение $\psi(u)$ имеет положительный конечный предел. В то же время характер поведения $\psi(u)$ в окрестности точки $u = \widetilde{u} = c/r$ качественно зависит от соотношения параметров λ и r :

(1) при $\lambda > r$ будет $\lim_{u\uparrow c/r} \psi(u) = 0$;

(2) при $\lambda = r$ имеем положительный конечный предел,

$$\lim_{u\uparrow c/r} \psi(u) = m^{-1}\big[\exp\big(c/(rm)\big) - 1\big]^{-1} \exp\big(c/(rm)\big) > 0,$$

а для функций $\psi(u)$, $\varphi(u)$ из (9), (10) окончательно имеем

$$\begin{aligned}\psi(u) \;&=\; m^{-1}\big[\exp\big(c/(rm)\big) - 1\big]^{-1} \exp(u/m), \quad 0 \leqslant u \leqslant c/r,\\ \varphi(u) \;&=\; \big[\exp\big(c/(rm)\big) - 1\big]^{-1} \left[\exp(u/m) - 1\right], \quad 0 \leqslant u \leqslant c/r;\end{aligned}$$

(3) при $\lambda < r$ будет $\lim_{u\uparrow c/r} \psi(u) = \infty$, где функция $\psi(u)$ интегрируема в точке $u = \widetilde{u} = c/r$.

Таким образом, из леммы 1, теоремы 2 и замечания 2 получаем, что ВНР в рассматриваемой модели является непрерывной, но, вообще говоря, негладкой функцией

НК u. В случае выполнения (5) она имеет при условии $\lambda \leqslant r$ точку разрыва производной $u = \widetilde{u} = c/r > 0$, при $\lambda > r$ является гладкой на всей неотрицательной полуоси; тем самым при $\lambda \leqslant r$ ВНР является *вязкостным негладким решением* ИДУ (6) (о понятии *вязкостных решений* в некоторой более общей модели см. [5]).

Численные исследования показали, что, несмотря на то, что безрисковый актив является надежным инструментом увеличения ВНР, рисковый актив с умеренной волатильностью может оказаться более эффективным для этой цели в рассматриваемой модели в области малых значений НК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asmussen S.*, *Albrecher H.* Ruin Probabilities. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, V. 14. Singapore: World Scientific, 2010, 602 p.
2. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. Heidelberg etc: Springer, 1991, 175 p.
3. *Belkina T. A.*, *Konyukhova N.B.*, *Slavko B. V.* Survival probability in the life annuity insurance model with stochastic return on investments. — CEUR-WS, V. 1726. The proceedings of the Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2016), Saratov, Russia, November 10-11, 2016. Eds: T. Belkina, S. Islyev, V. Mkhitaryan, S. Sidorov. P. 1–12 (e-print: http://ceur-ws.org/Vol-1726/).
4. *Belkina T.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability. — Markov Processes Relat. Fields, 2014, №20, p. 505–525.
5. *Белкина Т. А.*, *Кабанов Ю. М.* Вязкостные решения интегродифференциальных уравнений для вероятности неразорения. — Теория вероятн. и ее примен., 2015, т. 60, № 4, с. 802–810.