ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2017

И. В. Павлов, **С. В. Разгуляев** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Построение доверительных границ для коэффициента готовности системы с восстанавливаемыми элементами.**

Рассмотрим систему с последовательной структурой из m элементов, другими словами, система отказывает в случае отказа любого из элементов. Время безотказной работы i-го элемента — случайная величина (с. в.) ξ_i с функцией распределения (ф. р.) $F_i(t) = P\{\xi_i < t\}$, $i = 1, \ldots, m$. В случае отказа каждый i-й элемент восстанавливается (заменяется новым идентичным элементом) в течение случайного времени восстановления η_i с функцией распределения $G_i(t) = P\{\eta_i < t\}$.

Предполагается, что процессы отказов и восстановления элементов системы независимы между собой. Обозначим через $k_i = k_i(u_i) = u_i/(u_i + v_i)$ коэффициент готовности i-го элемента (вероятность исправного состояния i-го элемента в стационарном режиме), $u_i = M\xi_i = \int_0^\infty [1 - F_i(t)]\, dt$ — математическое ожидание времени безотказной работы, $v_i = M\eta_i = \int_0^\infty [1-G_i(t)]\, dt$ — математическое ожидание времени восстановления i-го элемента, $i = 1, \ldots, m$. Будем предполагать также, что параметры v_i — средние времена восстановления элементов системы известны и малы по сравнению со средним временем безотказной работы u_i (что чаще всего справедливо для высоконадежных систем). Коэффициент готовности системы для данной модели выражается через коэффициенты готовности отдельных элементов в следующем виде

$$K_g = K_g(u) = \prod_{i=1}^{m} k_i(u_i) = \prod_{i=1}^{m} u_i/(u_i + v_i),$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор параметров надежности отдельных элементов. Требуется построить нижнюю доверительную границу для коэффициента готовности системы на основе имеющейся статистической информации, полученной в ходе испытаний системы или ее отдельных элементов. Задачи подобного типа довольно часто встречаются в различных приложениях для систем с восстанавливаемыми элементами или подсистемами (см. [1]–[9] и др.). Далее будем предполагать, что статистическая информация по элементам системы представлена в виде стандартных статистических выборок с цензурированием типа $[N_i\, \text{Б}\, r_i]$ (в обозначениях книги [2]), другими словами испытывались N_i элементов i-го типа до наблюдения $r_i \leqslant N_i$ отказов, в результате чего наблюдались последовательные моменты отказов $0 \leqslant x_{i1} \leqslant x_{i2} \leqslant \cdots \leqslant x_{ir_i}$. Обозначим через $S_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{ir_i} + (N_i - r_i)x_{ir_i}$ суммарное время работы («наработку») всех элементов i-го типа на испытаниях, $i = 1, \ldots, m$. Требуется на основе вектора результатов испытаний по различным типам элементов системы $S = (S_1, \ldots S_m)$ построить нижнюю γ-доверительную границу $\underline{K} = \underline{K}(S)$ для коэффициента готовности системы.

Рассмотрим случай, когда времена работы до отказа элементов системы имеют экспоненциальное распределение: $F_i(t) = 1 - \exp(-t/u_i), i = 1, \ldots, m$. Обозначим через

$$\underline{u_i} = \underline{u_i}(\gamma) = \frac{2S_i}{\chi^2_\gamma(2r_i)}$$

стандартную нижнюю γ — доверительную границу для параметра u_i — среднего времени безотказной работы i-го элемента для «экспоненциального случая» (см., например, [2] и др.), $i = 1, \dots, m$. Коэффициент готовности системы может быть записан в виде $K(u) = \exp[f(u)]$ где функция $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i),$$

где $f_i(u_i) = \ln[u_i/(u_i + v_i)]$, $i = 1, \dots, m$. Задача далее может быть сформулирована как задача доверительного оценивания снизу функции $f(u)$.

Заметим далее, что с. в. S_i является r_i — кратной сверткой независимых с. в. имеющих экспоненциальное распределение с ф. р. $1 - \exp(-t/u_i)$. Следовательно, S_i имеет ВФИ-распределение. Отсюда следует, что и определенная выше нижняя γ — доверительная граница $\underline{u_i}$ также имеет ВФИ-распределение, [2].

Пусть функция $f(u) = f(u_1, \dots, u_m)$ монотонно строго возрастает по каждому параметру $u_i > 0$, имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial u_i} > 0$, $i = 1, \dots, m$ и выпукла вверх по вектору $u = (u_1, \dots, u_m) \in E_m^+$. Тогда при $\gamma \geqslant 1 - e^{-3/2}$ справедливо неравенство [5], [9]

$$P\{f(\underline{u_1}, \underline{u_2}, \dots, \underline{u_m}) \leqslant f(u_1, u_2, \dots, u_m)\} \geqslant \gamma,$$

где $\underline{u_i}$ — нижняя γ — доверительная граница для параметра u_i, $i = 1, \dots, m$. Нетрудно далее убедиться, что определенная выше функция $f(u) = \sum_{i=1}^{m} f_i(u_i)$ удовлетворяет этим условиям.

Следовательно, при $\gamma \geqslant 1 - e^{-3/2} \cong 0,777$ нижняя γ — доверительная граница для $f(u)$ может быть вычислена далее как $\underline{f} = f(\underline{u})$. Поскольку коэффициент готовности системы $K(u) = \exp[f(u)]$, то аналогичным образом может вычисляться и нижняя γ — доверительная граница для коэффициента готовности системы по формуле

$$\underline{K} = K(\underline{u}) = \prod_{i=1}^{m} K_i(\underline{u_i}),$$

где $\underline{u_i} = \underline{u_i}(\gamma)$ — нижние доверительные границы для параметров отдельных элементов с тем же коэффициентом доверия γ.

Таким образом, в данном подходе коэффициент доверия γ для отдельных элементов сохраняется при переходе от элементов к системе (при $\gamma \geqslant 1 - e^{-3/2}$), что дает значительный выигрыш при построении нижней доверительной границы для надежности системы по сравнению с известным методом Ллойда и Липова [1]. Соответствующий выигрыш тем больше, чем больше число различных подсистем m.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ллойд Д., Липов М.* Надежность. М.: Сов. радио, 1964, 668 с.
2. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: КД Либроком, 2013, 584 с.
3. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. М.: Наука, 1969, 488 с.
4. *Павлов И. В., Ушаков И. А.* Вычисление показателей надежности для сложных систем с восстанавливаемыми элементами. — Изв. РАН. Теория и системы управления. 1989, т. 6, с. 170–176.
5. *Gnedenko B. V., Pavlov I. V., Ushakov I. A.* Statistical reliability engineering. N.Y.: John Wiley& Sons, 1999, 517 p.

6. *Павлов И. В.* Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением. — Изв. РАН. Теория и системы управления. 1988, т. 3, с. 109–116.
7. *Павлов И. В.* Расчет и оптимизация некоторых характеристик для модели вычислительного комплекса. — Информатика и ее применения, 2012, т. 6, в. 2, с. 59–62.
8. *Сидняев Н. И.* Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем. — Проблемы машиностроения и надежности машин, 2003, т. 4, с. 24.
9. *Павлов И. В.*, *Разгуляев С. В.* Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами. — Инженерный журнал: наука и инновации. 2015, в. 2, №38.