

С. А. Загребина, М. А. Сагадеева (Челябинск, ЮУрГУ). **О разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для нестационарного линейного уравнения соболевского типа.**

Рассмотрим в банаховых пространствах $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ нестационарное операторно-дифференциальное уравнение вида

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + g(t), \quad (1)$$

где оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, а оператор $M \in Cl(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. В уравнении (1) вектор-функция $g : [0, \tau] \rightarrow \mathfrak{Y}$ отвечает внешнему воздействию, а скалярная функция $a : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}_+$ характеризует изменение во времени параметров уравнения (1). Уравнения вида (1) при условии, что $\ker L \neq \{0\}$, называют уравнениями соболевского типа (см., например, [1–3]). Данное исследование лежит в рамках теории вырожденных полугрупп операторов, которая создана Г. А. Свиридьюком [3]. Отметим, что уравнение (1) будем рассматривать в относительно p -радиальном случае [3], т. е. операторы L и M порождают сильно непрерывную разрешающую полугруппу для однородного стационарного уравнения (1) ($a(t) \equiv 1$).

Зафиксируем $x_j \in \mathfrak{X}$ и $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ для $j = \overline{0, n}$ так, что $\tau_0 = 0$ и $\tau_{j-1} < \tau_j$, и рассмотрим многоточечную начально-конечную задачу [4]

$$\lim_{t \rightarrow \tau_0+} P_0(x(t) - x_0) = 0, \quad P_j(x(\tau_j) - x_j) = 0, \quad (\tau_{j-1} < \tau_j) \quad j = \overline{1, n} \quad (2)$$

для уравнения (1), где P_j некоторые относительно спектральные проекторы. Отметим, что общая постановка многоточечной начально-конечной задачи (1), (2) в относительно p -радиальном случае была впервые приведена в [5]. Если $n = 1$, то условие вида (2) называется начально-конечным условием, и оно для автономного уравнения соболевского типа первого порядка было рассмотрено многими авторами (см. обзор в [4]).

Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ будем называть соответственно L -резольвентным множеством и L -спектром оператора M . Предполагая, что $\rho^L(M) \neq \emptyset$, введем в рассмотрение оператор-функции комплексного переменного $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$, которые будем называть соответственно L -резольвентой, правой и левой L -резольвентами оператора M . Аналогично, оператор-функции $(p+1)$ комплексного переменного вида

$$R_{(\lambda, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\lambda_k}^L(M), \quad L_{(\lambda, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\lambda_k}^L(M), \quad \lambda_k \in \rho^L(M) \quad (k = \overline{0, p})$$

с областью определения $[\rho^L(M)]^{p+1}$, назовем соответственно правой и левой (L, p) -резольвентами оператора M .

Предположим, что оператор M (L, p) -радиален. Обозначим подпространства $\mathfrak{X}^0 = \ker R_{(\mu, p)}^L(M)$, $\mathfrak{Y}^0 = \ker L_{(\mu, p)}^L(M)$ и сужения $L_0 = L|_{\mathfrak{X}^0}$, $M_0 = M|_{\text{dom } M \cap \mathfrak{X}^0}$.

Через $\mathfrak{X}^1$ ($\mathfrak{Y}^1$) обозначим замыкание линейала $\text{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$ ($\text{im} L_{(\mu,p)}^L(M)$). Уравнение $L\dot{x} = Mx$ обладает сильно непрерывной разрешающей полугруппой операторов, которой имеют вид $X^t = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left((L - \frac{t}{k} M)^{-1} L \right)^k = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}^L(M) \right)^k$, $t > 0$. Единица полугруппы $\{X^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{X}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является проектором $P = \lim_{t \rightarrow 0+} X^t$ вдоль $\mathfrak{X}^0$ на подпространство $\mathfrak{X}^1$. Аналогично, проектор вдоль $\mathfrak{Y}^0$ на подпространство $\mathfrak{Y}^1$ обозначим как $Q = \lim_{t \rightarrow 0+} Y^t$, где $Y^t = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{t} L_{\frac{k}{t}}^L(M) \right)^k$.

Введем в рассмотрение условие

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1, \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1. \quad (3)$$

Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{X}^k$ ($\text{dom} M_k \cap \mathfrak{X}^k$), $k = 0, 1$. И введем в рассмотрение еще одно дополнительное условие

$$\text{существует оператор } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1). \quad (4)$$

О п р е д е л е н и е 1. Двухпараметрическое семейство $X(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ будем называть *вырожденным сильно непрерывным в нуле полупотоком* (коротко, C_0 -полупотоком) операторов, если выполнены следующие условия

- 1) $X(t, \tau)X(\tau, s) = X(t, s)$ для всех $0 \leq s < \tau < t$;
- 2) $X(t, s)$ сильно непрерывны для всех $t, s > 0$ и для всех $s \geq 0$ существует $\lim_{t \rightarrow s+0} X(t, s)x = x$ для всех x из линейала плотного в подпространстве $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. Пусть оператор M (L, p) -радиален ($p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), выполнены условия (3), (4) и функция $a \in C(\mathbb{R})$, тогда семейство $\{X(t, s) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t, s \in \mathbb{R}_+\}$, с операторами вида $X(t, s) = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} ((L - \frac{1}{k} M \int_s^t a(\zeta) d\zeta)^{-1} L)^k$ при $s < t$, является вырожденным C_0 -полупотоком операторов.

Рассмотрим условие

$$\left. \begin{aligned} \sigma^L(M) &= \bigcup_{j=0}^n \sigma_j^L(M), \quad n \in \mathbb{N}, \text{ причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset, \\ \text{существует замкнутый контур } \gamma_j &\subset \mathbb{C} \text{ и } \gamma_j = \partial D_j, \text{ где } D_j \supset \sigma_j^L(M), \\ \text{что } \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) &= \emptyset \text{ и } \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \text{ при всех } j, k, l = \overline{1, n}, k \neq l. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В силу голоморфности относительных резольвент существуют проекторы $P_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и $Q_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ ($j = \overline{0, n}$) [5] вида $P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R_\mu^L(M) d\mu$, $Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} L_\mu^L(M) d\mu$ при $j = \overline{1, n}$ и $P_0 = P - \sum_{j=1}^n P_j$, $Q_0 = Q - \sum_{j=1}^n Q_j$, где P и Q определены выше. Введем в рассмотрение подпространства $\mathfrak{X}_j^1 = \text{im} P_j$, $\mathfrak{Y}_j^1 = \text{im} Q_j$, $j = \overline{0, n}$. По построению $\mathfrak{X}^1 = \bigoplus_{j=0}^n \mathfrak{X}_j^1$ и $\mathfrak{Y}^1 = \bigoplus_{j=0}^n \mathfrak{Y}_j^1$. Обозначим сужения операторов через $L_{1j} = L|_{\mathfrak{X}_j^1}$ и $M_{1j} = M|_{\text{dom} M \cap \mathfrak{X}_j^1}$, $j = \overline{0, n}$.

О п р е д е л е н и е 2. Вектор-функцию $x \in C([\tau_0, \tau_n]; \mathfrak{X}) \cap C^1((\tau_0, \tau_n]; \mathfrak{X})$ будем называть *классическим решением уравнения (1)*, если она на (τ_0, τ_n) обращает его в тождество. Классическое решение $x = x(t)$ уравнения (1) называется *классическим решением многоточечной начально-конечной задачи (1), (2)*, если оно удовлетворяет условиям (2).

Теорема 2. Пусть оператор M (L, p) -радиален ($p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), выполнены условия (3)–(5) и функция $a \in C^{p+1}([\tau_0, \tau_n]; \mathbb{R}_+)$, тогда для любых векторов $x_j \in \mathfrak{X}_j^1$ ($j = \overline{0, n}$) и вектор-функции $g : (\tau_0, \tau_n) \rightarrow \mathfrak{Y}$ такой, что $Qg \in C((\tau_0, \tau_n), \mathfrak{Y}^1)$ и

$(\mathbb{I}_{\mathfrak{Y}} - Q)g \in C^{p+1}((\tau_0, \tau_n), \mathfrak{Y}^1)$ существует единственное классическое решение $x \in C([\tau_0, \tau_n]; \mathfrak{X}) \cap C^1((\tau_0, \tau_n]; \mathfrak{X})$ задачи (1), (2) вида

$$x(t) = - \sum_{k=0}^p (M_0^{-1} L_0)^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^k \frac{g^0(t)}{a(t)} + \sum_{j=0}^n \left(X(t, \tau_j) P_j x_j - \int_t^{\tau_j} X(t, s) P_j L_{1j}^{-1} g_j^1(s) ds \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Showalter R. E. The Sobolev type Equations. I (II). — *Applicable Analysis*, 1975, v. 5, № 1, № 2, p. 15–22, p. 81–99.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998, 438 с.
3. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht–Boston, VSP, 2003, 216 p.
4. Zagrebina S. A. A multipoint initial-final value problem for a linear model of plane-parallel thermal convection in viscoelastic incompressible fluid. — *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, v. 7, № 3, p. 5–22.
5. Zagrebina S. A., Sagadeeva M. A. The Generalized Splitting Theorem for Linear Sobolev type Equations in Relatively Radial Case. — *The Bulletin of Irkutsk State University, Series: Mathematics*, 2014, v. 7, p. 19–33.