ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2017

В. И. Пагурова (Москва, МГУ). **О совместном асимптотическом распределении промежуточных порядковых статистик.**

Исследуется совместное асимптотическое при $n \to \infty$ распределение промежуточных порядковых статистик, построенных по выборке объема n.

Обозначим $n_i = [t_i n^\alpha]$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < t_1 < \cdots < t_m, t_i$ не зависит от $n, 0 < \alpha < 1$, $[x]$ означает целую часть числа x. Рассмотрим вектор $(X_{n_1}^{(n)}, \ldots, X_{n_m}^{(n)})$ промежуточных порядковых статистик, построенных по выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ независимых одинаково распределенных величин с общей функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$.

Введем

$$\lambda_{k,n} = k/n, \quad k = k(n) \to \infty, \quad \lambda_{k,n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Необходимым и достаточным условием асимптотической нормальности при $n \to \infty$ статистики $T_n = (X_k^{(n)} - d_n)/c_n$ при некоторых $c_n > 0$ и d_n является условие [1, 2]: для любых x выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} (F(c_n\, x + d_n) - \lambda_{k,n})\sqrt{k}/\lambda_{k,n} = x.$$

Для абсолютно непрерывных распределений величины c_n и d_n определяются из соотношений

$$F(d_n) = \lambda_{k,n}, \quad c_n = \sqrt{k}/(nf(d_n)).$$

В работах [3, 4] показано, что при условии (1) возможными предельными распределениями при $n \to \infty$ статистики T_n являются нормальное и логнормальное распределения.

Будем считать, что для вектора $(X_{n_1}^{(n)}, \ldots, X_{n_m}^{(n)})$ величины $(X_{n_i}^{(n)} - d_{n,i})/c_{n,i}$, $i = 1, \ldots, m$, при $n \to \infty$ асимптотически стандартно нормальны и

$$0 \leqslant \lim_{n \to \infty} c_{n,1} < \infty. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $d_{n,i}$ и $f(d_{n,i}) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, тогда совместное распределение величин*

$$X_{n_1}^{(n)} - d_{n,1}, \ldots, X_{n_m}^{(n)} - d_{n,m}$$

при $n \to \infty$ сходится к m — мерному нормальному распределению с вектором нулевых математических ожиданий и ковариациями cov $(X_{n_i}^{(n)}, X_{n_j}^{(n)}) = \sqrt{t_i/t_j}c_{n,i}c_{n,j}$, $i \leqslant j$.

Замечание. Для широкого класса распределений, используемых в статистических приложениях, условие (2), как правило, выполняется. Существуют исключения. Пусть

$$F(x) \sim a|x|^{-\Delta}, \quad f(x) \sim a\Delta|x|^{-\Delta-1} \quad \text{при} \quad x \to -\infty, \quad a, \Delta > 0,$$

Тогда условие (2) справедливо лишь при $2/(2+\Delta) \leqslant \alpha < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов Н. В.* Предельные законы распределения для членов вариационного ряда. — Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, 1949, т. 25, с. 5–59.
2. *Смирнов Н. В.* О сходимости к нормальному закону распределений членов вариационного ряда. — Изв. АН УзССР, 1966, т. 3, с. 24–32.
3. *Чибисов Д. М.* О предельных распределениях для членов вариационного ряда. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 1, с. 159–163.
4. *Wu C. Y.* The types of limit distributions for some terms of variational series. — Sci. Sinica, 1966, v. 15, p. 749–762.