ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2017

Н. А. Манакова, **О. В. Гаврилова** (Челябинск, ЮУрГУ). **Исследование многокомпонентной модели Фитц Хью–Нагумо с условием Шоуотера–Сидорова.**

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V};\mathcal{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^M$ — множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^K$ — множество дуг, каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим многокомпонентную систему уравнений Фитц Хью–Нагумо

$$\left\{\begin{array}{c} v_{1jt} - \alpha_1 v_{1jss} + \beta_{11}v_{1j} + \beta_{12}v_{2j} + \dots + \beta_{1m}v_{mj} + \varkappa_1 v_{1j}^3 = u_{1j}, \\ v_{2jt} - \alpha_2 v_{2jss} + \beta_{21}v_{1j} + \beta_{22}v_{2j} + \dots + \beta_{2m}v_{mj} + \varkappa_2 v_{2j}^3 = u_{2j}, \\ \dots \\ v_{kjt} - \alpha_k v_{kjss} + \beta_{k1}v_{1j} + \beta_{k2}v_{2j} + \dots + \beta_{km}v_{mj} + \varkappa_k v_{kj}^3 = u_{kj}, \\ -\alpha_{k+1} v_{(k+1)jss} + \beta_{(k+1)1}v_{1j} + \beta_{(k+1)2}v_{2j} + \dots + \beta_{(k+1)m}v_{mj} = u_{(k+1)j}, \\ \dots \\ -\alpha_m v_{mjss} + \beta_{m1}v_{1j} + \beta_{m2}v_{2j} + \dots + \beta_{mm}v_{mj} = u_{mj} \\ \text{для всех } s \in (0,l_j),\ t \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,K}, \end{array}\right. \tag{1}$$

с условиями

$$\sum_{j:E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j v_{js}(0,t) - \sum_{r:E_r\in E^{\omega}(V_i)} d_r v_{rs}(l_r,t) = 0, \tag{2}$$

$$v_r(0,t) = v_j(0,t) = v_h(l_h,t) = v_n(l_n,t). \tag{3}$$

Краевые условия (2), (3) и система уравнений (1) образуют математическую многокомпонентную модель Фитц Хью–Нагумо. Дополним (2), (3) начальными условиями Шоуолтера–Сидорова

$$v_{ij}(s,0) = v_{0ij}(s)\, \text{для всех}\, s \in (0,l_j),\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,K}. \tag{4}$$

Впервые уравнения соболевского типа на графе были изучены в работе [1]. В [2] рассматриваются задача Шоуолтера–Сидорова и задача оптимального управления для вырожденной двухкомпонентной модели Фитц Хью–Нагумо.

Построим банахово пространство $\mathfrak{H} = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_K) : g_j \in W_2^1(0,l_j)$ и выполнено условие (3) $\}$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = (L_2^m(\mathbf{G}), [\cdot,\cdot])$, банахово пространство $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}^m$, а через $\mathfrak{A}^*$ обозначим сопряженное пространство к пространству $\mathfrak{A}$ относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$. В силу теоремы вложения Соболева имеют место плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{H} \hookrightarrow L_4(\mathbf{G})$, причем вложение $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно. В дальнейшем будем считать, что матрица $B = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^m$ обладает свойством

$$\exists C_B, C_B > 0 : C_B\,[x,x] \le [Bx,x] \le C^B\,[x,x]. \tag{5}$$

Пусть $x = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, тогда операторы L и $M = M_1 + M_2$ примут вид

$$[Lx,\zeta] = \langle v_1, \eta_1\rangle + \dots + \langle v_k, \eta_k\rangle, \quad x,\zeta \in \mathfrak{A}$$

$$[M_1(x),\zeta] = \alpha_1\langle v_{1s},\zeta_{1s}\rangle + \langle \beta_{11}v_1+\beta_{12}v_2+\dots+\beta_{1m}v_m,\zeta_1\rangle + \alpha_2\langle v_{2s},\zeta_{2s}\rangle$$
$$+\langle \beta_{21}v_1+\beta_{22}v_2+\dots+\beta_{2m}v_m,\zeta_2\rangle + \dots + \alpha_m\langle v_{ms},\zeta_{ms}\rangle$$
$$+\langle \beta_{m1}v_1+\beta_{m2}v_2+\dots+\beta_{mm}v_m,\zeta_m\rangle,\ x,\zeta\in\mathfrak{A},$$

$$[M_2(x),\zeta] = \varkappa_1\langle v_1^3,\zeta_1\rangle + \varkappa_2\langle v_2^3,\zeta_2\rangle + \ldots + \varkappa_k\langle v_k^3,\zeta_1\rangle,\ x,\zeta\in\mathfrak{A},$$

где $v_i^3 = (v_{i1}^3, v_{i2}^3, \dots, v_{iK}^3), i = 1,\dots,k.$

Лемма. (i) *Оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{A};\mathfrak{A}^*)$ — *самосопряженный, неотрицательно определенный оператор.*

(ii) *Пусть* $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1,\dots,m$, *и выполнено условие* (5), *тогда оператор* $M_1 \in C^\infty(\mathfrak{A};\mathfrak{A}^*))$ s*-монотонен и* 2*-коэрцитивен.*

(iii) *Пусть* $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1,\dots,k$, *тогда оператор* $M_2 \in C^\infty(L_4^k(\mathbf{G}); L_{\frac{4}{3}}^k(\mathbf{G}))$ s *-монотонен и* 4*-коэрцитивен.*

Построим пространства

$$\mathfrak{X} = \{x = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m) : v_i \in L_\infty(0,T;\mathfrak{H}) \cap L_4(0,T;\mathfrak{H})),$$
$$\frac{dv_i}{dt} \in L_2(0,T;\mathfrak{H}),\ i = 1,\dots,k;\ v_i \in L_\infty(0,T;\mathfrak{H}) \cap L_2(0,T;\mathfrak{H})),\ i = k+1,\dots,m\};$$

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_m) : u_i \in L_{\frac{4}{3}}(0,T;L_4(\mathbf{G})),\ i = 1,\dots,k;$$
$$u_i \in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*),\ i = k+1,\dots,m\}.$$

Теорема. *Пусть* $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1,\dots,m$, $\varkappa_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1,\dots,k$ *и выполнено условие* (5). *Тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{A}$, $u \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение* $x \in \mathfrak{X}$ *задачи* (1)–(4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г. А., Шеметова В. В.* Уравнения Хоффа на графах. — Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, №1, с. 139–145.
2. *Манакова Н. А., Гаврилова О. В.* Оптимальное управление для одной математической модели распространения нервного импульса. — Вестник ЮУрГУ. Сер. математическое моделирование и программирование, 2015, т. 8, № 4, с. 120–126.