ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2017

**В. И. А ф а н а с ь е в** (Москва, МИРАН)**. Функциональная предельная теорема для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц.**

Рассмотрим разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц. Предположим, что частицы первого типа производят частицы первого и второго типов, причем в одинаковых количествах, а частицы второго типа производят только частицы своего типа.

Пусть $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, $s \geqslant 0$, — производящие функции некоторых неотрицательных целочисленных случайных величин $\xi$ и $\eta$ соответственно. Предположим, что наибольший общий делитель множества таких чисел $k \in \mathbf{N}$, что $\mathbf{P}(\xi = k) > 0$, равен 1. Кроме того, предположим, что $\mathbf{E}\,\xi = 1$, $\mathbf{Var}\,\xi :=\sigma_1^2 \in (0,\infty)$ и $\mathbf{E}\,\eta = 1$, $\mathbf{Var}\,\eta :=\sigma_2^2 \in (0,\infty)$.

Введем производящие функции для потомства одной частицы первого и второго типов соответственно: при $s_1, s_2 \geqslant 0$

$$f_1(s_1,s_2) = \varphi(s_1 s_2), \quad f_2(s_1,s_2) = \psi(s_2).$$

Обозначим $\xi_n$ и $\eta_n$ количества частиц первого и второго типов соответственно в $n$-ом поколении рассматриваемого ветвящегося процесса. Предполагается, что $\xi_0 = 1$ и $\eta_0 = 0$. Положим $\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$.

Отметим, что случайный процесс $\{\xi_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ является критическим ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с производящей функцией потомства одной частицы $\varphi(\cdot)$. При фиксированном процессе $\{\xi_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ случайный процесс $\{\eta_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ представляет собою критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с $\xi_n$ иммигрантами в $n$-ом поколении при каждом $n \in \mathbf{N}$. Заметим, что при этом производящей функцией потомства одной частицы (в том числе и каждого иммигранта) является $\psi(\cdot)$.

Напомним, что броуновская экскурсия $\left\{W_0^+(t),\ t \in [0,1]\right\}$ — это случайный процесс с непрерывными траекториями, являющийся предельным по распределению при $\varepsilon \downarrow 0$ для броуновского движения $\{W(t),\ t \in [0,1]\}$, рассматриваемого при условии, что $\sup_{t\in[0,1]} W(t) \geqslant -\varepsilon$ и $W(1) \leqslant \varepsilon$. Локальное время $l_0^+(y)$ на уровне $y \geqslant 0$ броуновской экскурсии $\left\{W_0^+(t),\ t \in [0,1]\right\}$ определяется по формуле

$$l_0^+(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 I_{[y,y+\varepsilon]}\left(W_0^+(t)\right) dt,$$

где $I_A(\cdot)$ — индикатор множества $A$. Отметим, что существует непрерывная модификация случайного процесса $\left\{l_0^+(t),\ t \geqslant 0\right\}$.

Сформулируем основной результат. Пусть $\nu$ — положительная случайная величина с плотностью вероятностей

$$p(y) = \frac{2^{5/4}\sqrt{\pi\sigma_2}}{\Gamma(1/4)} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_2 y^2}\right), \quad y > 0,$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция Лапласа. Предположим также, что случайная величина $\nu$ не зависит от процесса $\left\{W_0^+(t),\ t \in [0,1]\right\}$.

**Теорема 1**. *При* $N \to \infty$

$$\left\{ \frac{\xi_{\lfloor t \sqrt[4]{N} \rfloor}}{\sqrt[4]{N}},\ t \geqslant 0 \ \middle|\ \Sigma_2 > N \right\} \xrightarrow{D} \left\{ \frac{\sigma_1}{2\nu} l_0^+ \left( \frac{\sigma_1}{2} t\nu \right),\ t \geqslant 0 \right\},$$

*где символ* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в функциональном пространстве* $D[0,\infty)$ *с топологией Скорохода.*

В качестве следствия теоремы 1 получается следующий результат. Положим $M_1 = \sup_{n \in \mathbf{N}} \xi_n$, $M_0^+ = \sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t)$.

**Теорема 2**. *При* $N \to \infty$

$$\left\{ \frac{M_1}{\sigma_1 \sqrt[4]{N}} \ \middle|\ \Sigma_2 > N \right\} \xrightarrow{D} \left\{ \frac{M_0^+}{\nu},\ t \geqslant 0 \right\},$$

*где символ* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость случайных величин по распределению.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).