ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2017

А. Л. Якымив (Москва, МИАН). **Предельная теорема для распределения типа кратного степенного ряда.**

Памяти Валентина Фёдоровича Колчина посвящается.

Пусть задана кратная последовательность $a(i) \geqslant 0$, $i \in Z_+^n \equiv \{0, 1, 2, \dots\}^n$, причем при $x \in (0,1)^n$ сходится степенной ряд

$$B(x) = \sum_{i \in Z_+^n} a(i) x^i \equiv \sum_{i_1, \dots, i_n \in Z_+} a(i_1, \dots, i_n) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} > 0$$

и расходится при $x = \mathbf{1} \equiv (1, \dots, 1)$. Мы будем говорить, что с. в. ξ_x имеет распределение типа кратного степенного ряда, если $\mathsf{P}\{\xi_x = i\} = a(i) x^i / B(x)$, $\forall i \in Z_+^n$, где $x \in (0,1)^n$. Такие распределения используются в обобщенной схеме размещения [4]. Основателем этой схемы является В.Ф. Колчин [1]. Его результаты, в частности, с использованием этой схемы, занимают видное место в вероятностной комбинаторике (см., например, [2, 3]).

Пусть $\mathfrak{A}$ - δ-кольцо ограниченных борелевских множеств из R^n. Положим при $A \in \mathfrak{A}$ и $b > 0$ (т. е., при $b \in R_+^n \equiv (0, \infty)^n$)

$$\mu_b(A) = \frac{1}{B(\exp\{-\mathbf{1}/b\})} \sum_{i:\ i \in Z_+^n,\ i/b \in A} a(i)$$

(если $A \cap Z_+^n = \emptyset$, то мы полагаем $\mu_b(A) = 0$. Здесь и далее $a/b = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n)$, $\forall a \in R^n$). Из замечания 3 статьи автора [5] следует

Лемма. *Пусть для произвольного фиксированного* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$ *при* $b = (b_1, \dots, b_n) > 0$ *и* $\min_{j=1,\dots,n} b_j \to \infty$

$$\frac{B(\exp\{-\lambda/b\})}{B(\exp\{-\mathbf{1}/b\})} \to \Psi(\lambda) \in (0, \infty),$$

где $\exp\{-\lambda/b\} = (\exp\{-\lambda_1/b_1\}, \dots, \exp\{-\lambda_n/b_n\})$. *Тогда существуют такие числа* $\alpha_j \geqslant 0$, *что* $\Psi(\lambda) = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{\alpha_j}$, $\forall \lambda \in R_+^n$ *и при* $\min_{j=1,\dots,n} b_j \to \infty$ $\mu_b \Rightarrow \nu$, *т. е.* $\mu_b(A) \to \nu(A)$ *для произвольного* $A \in \mathfrak{A}$ *с* $\nu(\partial A) = 0$. *Здесь*

$$\nu(A) = \int_{A \cap [0,\infty)^n} \nu_1(dy_1) \dots \nu_n(dy_n),$$

где $\nu_j(dy_j) = y_j^{\alpha_j - 1} dy_j / \Gamma(\alpha_j)$, *если* $\alpha_j > 0$ *и мера* ν_j *сосредоточена в нуле с весом 1, если* $\alpha_j = 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены все предположения леммы* 1, *причем все* $\alpha_j > 0$. *Кроме этого, предположим, что для каждого* $j = 1, \dots, n$ *выполнено одно из следующих соотношений: при* $b = (b_1, \dots, b_n) > 0$ *и* $\min_{l=1,\dots,n} b_l \to \infty$ *для произвольной функции* $z_j = z_j(b) > 1, z_j = 1 + o(1)$ *выполнено одно из следующих неравенств:*

$$\liminf_{\min_{l=1,\dots,n} b_l \to \infty} (f(b_1, \dots, b_{j-1}, z_j b_j, b_{j+1}, \dots, b_n) - f(b))/g(b) \geqslant 0; \qquad (1)$$

$$\limsup_{\min_{l=1,\ldots,n} b_l \to \infty} (f(b_1, \ldots, b_{j-1}, z_j b_j, b_{j+1}, \ldots, b_n) - f(b))/g(b) \leqslant 0, \tag{2}$$

где $f(b) = a([b])$, $g(b) = B(\exp\{-\mathbf{1}/b\})/\prod_{j=1}^n b_j$. *Тогда для произвольного фиксированного* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R_+^n$ *при* $\min_{i=1,\ldots,n} b_i \to +\infty$

$$\frac{a([by])}{g(b)} = \frac{f(y_1 b_1, \ldots, y_n b_n)}{g(b)} \to \varphi(y) \equiv \frac{\prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j - 1}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}.$$

При этом последнее соотношение выполнено равномерно по $y \in K$ *для произвольного компакта* $K \subset R_+^n$. *Здесь* $a([by]) = a([b_1 y_1], \ldots, [b_n y_n])$.

Заключение теоремы 1 останется в силе, если в соотношениях (1) и (2) функцию $g(b)$, стоящую в их знаменателях, заменить на $f(b)$ [5, теорема 4]. Доказательство теоремы 1 проводится по той же схеме, что и упомянутой теоремы 4 из [5]. Одно из неравенств (1) или (2) выполнено, в частности, если кратная последовательность $a(i)$ монотонна по каждой переменной. Из леммы 1 и теоремы 1 выводится следующий результат.

Теорема 2. *Если выполнены условия леммы* 1, *то* $\xi_x(\mathbf{1} - x) \xrightarrow{D} (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *при* $x \uparrow \mathbf{1}$, *где с. в.* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *независимы и* γ_j *имеет* Γ *-распределение с параметром* α_j, *если* $\alpha_j > 0$ *и сосредоточена в нуле, если* $\alpha_j = 0$. *Если выполнены предположения теоремы* 1, *то*

$$\frac{\mathsf{P}\{\xi_x = [y/(\mathbf{1} - x)]\}}{\prod_{j=1}^n (1 - x_j)} \to \frac{\prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j - 1} e^{-y_j}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}$$

при $x \uparrow \mathbf{1}$ *равномерно по* $y \in K$ *для произвольного компакта* $K \subset R_+^n$.

В [4] соответствующий одномерный результат доказан методом моментов. Доказательство теоремы 2 при помощи леммы 1 и теоремы 1 существенно проще.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф.* Один класс предельных теорем для условных распределений. — Лит. матем. сборник, 1968, т. 8, в. 1, с. 111–126.
2. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 207 с.
3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 256 с.
4. *Тимашёв А. Н.* Распределения типа степенного ряда и обобщенная схема размещения. М.: Академия, 2016, 168 с.
5. *Якымив А. Л.* Тауберова теорема для кратных степенных рядов. — Матем. сб., 2016, т. 207, в. 2, с. 143–172.