ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2017

А. С. Рыбаков (Москва, ТВП). **О количестве целых точек в многомерной области.**

Хорошо известный гауссовский принцип соотношения объемов (в англоязычной литературе — Gaussian volume heuristic) гласит, что количество точек решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ранга n в компактном множестве $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ примерно равно $\mathrm{vol}(\mathcal{S})/\det\Lambda$, где $\mathrm{vol}(\mathcal{S})$ — лебегов объем множества $\mathcal{S}$, а $\det\Lambda$ — определитель решетки Λ. В литературе приводятся различные условия на $\mathcal{S}$, при которых выражению «примерно равно» можно придать точную количественную формулировку. Одно из таких условий связано с оценкой количества отрезков, получаемых при пересечении произвольной прямой либо с самим множеством $\mathcal{S}$, либо с его проекциями на различные линейные подпространства.

Более точно, пусть $\mathcal{S}$ — компактное множество в $\mathbb{R}^n$ и h — натуральное число. Будем говорить, что множество $\mathcal{S}$ является *h-интервальным*, если для любой прямой $\mathcal{L}$ пересечение $\mathcal{S} \cap \mathcal{L}$ представляется в виде не более, чем h отрезков $[\alpha;\beta]$ (включая отдельные точки $\{\alpha\} = [\alpha;\alpha]$), и то же самое верно для проекции $\mathcal{S}$ на любое подпространство, получаемое приравниванием каких-либо координат нулю. В частности, любое выпуклое множество, очевидно, является 1-интервальным.

В настоящей работе дано уточнение оценки модуля остаточного члена

$$R = |\mathcal{S} \cap \Lambda| - \frac{\mathrm{vol}_n(\mathcal{S})}{\det\Lambda}$$

по сравнению с ранее известными результатами для h-интервальных множеств при любом фиксированном числе h. Основной результат нашей работы имеет следующий вид.

Теорема. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ есть h-интервальное множество, лежащее в замкнутом n-мерном шаре $\mathcal{B}_n(\overline{0}, r)$ радиуса r с центром в нуле, и $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — решетка с последовательными минимумами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда для количества точек множества $\Lambda \cap \mathcal{S}$ имеет место оценка*

$$|\Lambda \cap \mathcal{S}| = \frac{\mathrm{vol}_n(\mathcal{S})}{\det\Lambda} + R, \quad |R| \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(\mathcal{B}_n(\overline{0}, r))}{\det\Lambda} \, \frac{n^2 e^{\delta/n}}{2,5} \sum_{0 \leqslant k < n} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{\rho_i}{r},$$

где

$$\delta = \begin{cases} 2, & n \leqslant 2, \\ 3, & n \geqslant 3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \rho_i = \frac{h \cdot i^{5/2} \cdot \lambda_i}{\sqrt{8\pi} \cdot (n - i + 1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из этой теоремы получены три следствия.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы радиус шара r удовлетворяет неравенству $r \geqslant \rho_{n-1}$. Тогда для остаточного члена R имеет место оценка*

$$|R| \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(\mathcal{B}_n(\overline{0}, r))}{\det\Lambda} \, \frac{n^3 e^{\delta/n}}{2,5} \, \frac{\rho_n}{r}.$$

Следствие 2. *Пусть при условии теоремы*

$$j = \max\{k : 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ r \geqslant \rho_k\},$$

где по определению считаем, что $\rho_0 = 0$. *Тогда для остаточного члена* R *имеет место оценка*

$$|R| \leqslant \frac{(n!)^{3/2} h^n}{(2\pi)^{n/2}}\, n^3\, 2^{4\sqrt{n}}\, \frac{(r/h)^j}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_j}.$$

Следствие 3. *Пусть* $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ *— компактное выпуклое множество положительного объема и* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *— решетка ранга* n. *Предположим, что минимальное аффинное подпространство, содержащее пересечение* $\Lambda \cap \mathcal{S}$, *совпадает с* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для количества точек этого пересечения имеет место оценка*

$$|\Lambda \cap \mathcal{S}| \leqslant \frac{\operatorname{vol}_n(\mathcal{S})}{\det \Lambda} \Big(1 + \frac{(n!)^{5/2} n^n}{(2\pi)^{n/2}}\, n^3\, 2^{4\sqrt{n}}\Big).$$

Следствие 1 является уточнением леммы 1 п. 2 из работы [1], в которой для величины R указана лишь оценка $O\,(\lambda_n\, r^{n-1}/\det \Lambda)$. Отметим, что в условии этой леммы требуется выполнение неравенства $r \geqslant \lambda_{n-1}$, однако, как видно из доказательства, утверждение леммы останется верным, если имеет место лишь оценка $r \geqslant c_{n,h}\lambda_{n-1}$ с произвольной константой $c_{n,h} > 0$. В частности, утверждение верно, если $r \geqslant \rho_{n-1}$, где число ρ_{n-1} определено в теореме.

Константа

$$c_n = \frac{(n!)^{3/2} h^n}{(2\pi)^{n/2}}\, n^3 2^{4\sqrt{n}},$$

фигурирующая в следствии 2, значительно уточняет аналогичную константу $c'_n = 8^n\, n^{3n^2+5n/2}$, получаемую из теорем 2.4 и 2.6 работы [2] в частном случае $h = 1$. Более того, наша константа c_n значительно улучшает и константу $c''_n = (h + 2 \cdot 3^{\,n-1/2}\, n)^n$, фигурирующую в теореме 2.3 из указанной работы.

Константа

$$d_n = 1 + \frac{(n!)^{5/2} n^n}{(2\pi)^{n/2}}\, n^3\, 2^{4\sqrt{n}},$$

фигурирующая в следствии 3, намного точнее аналогичной константы

$$d'_n = 8^{\,n}\, n^{\,3\,n^2/2+3n}\, \frac{\pi^{n/2} n!}{2^{\,n}\, \Gamma(1+n/2)},$$

указанной в следствии 2.10 работы [2] и являющейся величиной порядка $c^n n^{3n^2/2+7n/2}$, где c — абсолютная постоянная, $c > 1$.

Таким образом, для h-интервальных множеств $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ получена оценка мощности пересечения $\mathcal{S} \cap \Lambda$ с произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ранга n, уточняющая ранее известные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schmidt W. M.* Northcott's theorem on heights II. The quadratic case. — Acta Arith. 1995, v. 70, p. 343–375.
2. *Widmer M.* Lipschitz class, narrow class, and counting lattice points. — Proc. Amer. Math. Soc., 2012, v. 140, № 2, p. 677–689.