

Е. Е. Дьяконова (Москва, МИ РАН). О ветвящемся процессе в случайной среде.

Пусть $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), Z_2(n), \dots, Z_k(n))$, $n \geq 0$, — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с k типами частиц в случайной среде $\pi := \{\mathbf{f}_n(\mathbf{s}), n \geq 0\}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$, которая задается последовательностью независимых одинаково распределенных наборов $\mathbf{f}_n(\mathbf{s}) = (f_n^{(1)}(\mathbf{s}), f_n^{(2)}(\mathbf{s}), \dots, f_n^{(k)}(\mathbf{s}))$ вероятностных производящих функций. Процесс $\mathbf{Z}(n)$, $n \geq 0$, в случайной среде π описывает эволюцию популяции частиц, в которой $Z_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$, — число частиц типа i в n -м поколении. Предполагается, что при фиксированном наборе $\mathbf{f}_n(\mathbf{s})$ все $Z_i(n)$ частиц типа i из n -го поколения размножаются согласно k -мерной производящей функции $f_n^{(i)}(\mathbf{s})$ независимо от других частиц из n -го поколения и предыстории процесса.

Обозначим $\mathbf{M}_n = (M_n(i, j))_{i, j=1}^k$ матрицу средних значений, соответствующую $\mathbf{f}_n(\mathbf{s})$. Предполагается, что $M_n(i, j) > 0$ с вероятностью 1. Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{M}_n)$ — левый положительный собственный вектор матрицы $\mathbf{M}_n$, соответствующий ее перрону корню ϱ_n . Положим $X_{i+1} = \log \varrho_i$, $i \geq 0$. Ясно, что $\{X_n, n \geq 1\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Предполагается, что случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ нерешетчато. Будем обозначать символом $\mathbf{P}_\pi$ условную вероятность при фиксированной среде π . Пусть $T_i, i = 1, 2, \dots, k$, — момент вырождения процесса $\mathbf{Z}(n), n \geq 0$, начавшегося с одной частицы типа i , $q_\pi^{(i)}(n) = \mathbf{P}_\pi\{T_i > n\}$, $\mathbf{q}_\pi(n) = (q_\pi^{(1)}(n), q_\pi^{(2)}(n), \dots, q_\pi^{(k)}(n))$.

При некоторых условиях на производящие функции $\mathbf{f}_n(\mathbf{s})$, в частности для случая, когда для всех n первые моменты производящих функций $f_n^{(1)}(\mathbf{s}), f_n^{(2)}(\mathbf{s}), \dots, f_n^{(k)}(\mathbf{s})$ ограничены снизу положительной константой, а вторые моменты ограничены сверху, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 =: \sigma \in (0, \infty)$ и существует такой вектор $\mathbf{v}, |\mathbf{v}| = 1$, что $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{M}_n)$ с вероятностью 1. Тогда распределения случайных величин

$$\xi_n := e^{-\min_{0 \leq j \leq n} S_j}(\mathbf{v}, \mathbf{q}_\pi(n))$$

сходятся при $n \rightarrow \infty$ к распределению случайной величины $\xi \in (0, 1]$.

Работа выполнена по ПФИ ПРАН «Математические задачи современной теории управления»: проект № 7 «Динамика популяций, описываемых ветвящимися процессами» (0014-2016-0023).