ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 26 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2019

А. В. Калинкин, М. А. Степанова (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Спектральное представление переходных вероятностей для марковского ветвящегося процесса $\mathbf{T_1 \to T_2}$; $\mathbf{T_2 \to T_1}$.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$, переходные вероятности

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) = \mathbf{P}\left\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\right\}$$

которого при $t \to 0+$ представимы в виде $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$

$$\begin{aligned} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2+1)}(t) &= \lambda_1 \alpha_1 t + o(t), \\ P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1+1,\alpha_2-1)}(t) &= \lambda_2 \alpha_2 t + o(t), \\ P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) &= 1 - (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)t + o(t). \end{aligned}$$

Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2),$$

где

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta 1,\beta_2=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t)\, s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}, \quad |s_1| \leqslant 1, \quad |s_2| \leqslant 1,$$

удовлетворяет первому и второму уравнениям Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \lambda_1 z_1 \Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\Big) + \lambda_2 z_2 \Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2}\Big), \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \lambda_1 (s_2 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1} + \lambda_2 (s_1 - s_2) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_2}, \end{aligned} \tag{1}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

Решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) ищем в виде ряда с разделенными переменными

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} A_{\alpha_1\alpha_2}\, \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2)\, C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2)\, e^{-\lambda_{\alpha_1\alpha_2} t}. \tag{2}$$

Подставляя ряд (2) в уравнения (1), получаем для $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$ уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \lambda_1 z_1 \Big(\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_2} - \frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1}\Big) + \lambda_2 z_2 \Big(\frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_1} - \frac{\partial \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial z_2}\Big) + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} \widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2} &= 0, \\ \lambda_1 (s_2 - s_1) \frac{\partial C_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial s_1} + \lambda_2 (s_1 - s_2) \frac{\partial C_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial s_2} + \lambda_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_1\alpha_2} &= 0. \end{aligned}$$

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2019 г.

Так как процесс $\xi(t)$ принимает значения из множества

$$L = \big\{(0, \alpha_1+\alpha_2), (1, \alpha_1+\alpha_2-1), \ldots, (\alpha_1+\alpha_2, 0)\big\},$$

то имеет место краевое условие «решение есть многочлен», что возможно для последовательности «собственных значений» $\lambda_{\alpha_1\alpha_2} = \alpha_1(\lambda_1+\lambda_2)$. «Собственные функции» имеют вид

$$\widetilde{C}_{\alpha_1\alpha_2}(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)^{\alpha_1} (z_1+z_2)^{\alpha_2}$$

$$C_{\alpha_1\alpha_2}(s_1, s_2) = (s_1-s_2)^{\alpha_1} (\lambda_2 s_1 + \lambda_1 s_2)^{\alpha_2}.$$

Получаем

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} A_{\alpha_1\alpha_2} (\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)^{\alpha_1} (z_1+z_2)^{\alpha_2} (s_1-s_2)^{\alpha_1} (\lambda_2 s_1 - \lambda_1 s_2)^{\alpha_2} e^{-\alpha_1(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

При начальном условии $t = 0$ имеем разложение в ряд

$$e^{z_1 s_1 + z_2 s_2} = \exp\left\{\frac{\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2}{\lambda_1+\lambda_2}(s_1-s_2) + (z_1+z_2)\frac{\lambda_2 s_1 + \lambda_1 s_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right\}$$

$$= \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)^{\alpha_1}(s_1-s_2)^{\alpha_1}(z_1+z_2)^{\alpha_2}(\lambda_2 s_1+\lambda_1 s_2)^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!(\lambda_1+\lambda_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Отсюда $A_{\alpha_1\alpha_2} = 1/(\alpha_1!\alpha_2!(\lambda_1+\lambda_2)^{\alpha_1+\alpha_2})$.

Теорема [2]. *Двойная производящая функция переходных вероятностей равна*

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,(\lambda_1+\lambda_2)^{\alpha_1+\alpha_2}} (\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2)^{\alpha_1} (z_1+z_2)^{\alpha_2} \times (s_1-s_2)^{\alpha_1} (\lambda_2 s_1 + \lambda_1 s_2)^{\alpha_2} e^{-\alpha_1(\lambda_1+\lambda_2)t}. \tag{3}$$

Ряд (3) легко суммируется:

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \exp\{z_1 F_1(t; s_1, s_2) + z_2 F_2(t; s_1, s_2)\},$$

где

$$F_1(t; s_1, s_2) = \frac{\lambda_2 s_1 + \lambda_1 s_2}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_1(s_1-s_2)}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t},$$

$$F_2(t; s_1, s_2) = \frac{\lambda_2 s_1 + \lambda_1 s_2}{\lambda_1+\lambda_2} - \frac{\lambda_2(s_1-s_2)}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

Из разложения экспоненты по z_1, z_2 и определения $\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2)$ получаем следующее утверждение.

Следствие [1]. *Для марковского процесса рождения и гибели линейного типа* $\xi(t)$ *имеет место свойство ветвления переходных вероятностей*

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = F_1^{\alpha_1}(t; s_1, s_2) F_2{}^{\alpha_2}(t; s_1, s_2), \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots$$

Изложенный метод переносится на процессы рождения и гибели квадратичного типа на множестве $L, T_1+T_2 \to 2T_2; T_1 \to T_2$ (эпидемия SIS) и $T_1+T_2 \to 2T_1, 2T_2$ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
2. *Степанова М. А.* Спектральное представление переходных вероятностей для марковской модели равновесной реакции $T_1 \to T_2$; $T_2 \to T_1$. — В сб.: Необратимые процессы в природе и технике: Десятая Всероссийская конференция (Москва, 29–31 января 2019 г.). Труды в 3 ч. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019, Ч. 2, с. 13–16.
3. *Калинкин А. В.* Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц. — Теория вероятн. и ее применен., 2002, т. 47, в. 3, с. 452–474.