А. В. Калинин, С. С. Кудряшов (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Вероятности вырождения марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T_1 \rightarrow T_1 + T_2, 2T_2$.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\}$, переходные вероятности

$$P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbf{P} \{ \xi(t) = (\beta_1, \beta_2) | \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2) \}$$

которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде,

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = p_{11} \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1-2, \alpha_2+2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = p_{02} \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 1 - \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda t + o(t),$$

где $\lambda > 0$, $p_{11} \geq 0$, $p_{02} \geq 0$, $p_{11} + p_{02} = 1$. Производящая функция переходных вероятностей

$$F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}, \quad |s_1| \leq 1, \quad |s_2| \leq 1,$$

удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial t} = \lambda (p_{11} s_1 s_2 + p_{02} s_2^2 - s_1^2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_1^2},$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей

$$G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t),$$

удовлетворяет первому (обратному) уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2)}{\partial t} = \lambda z_1^2 \left(p_{11} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + p_{02} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2),$$

с начальным условием $G_{(\beta_1, \beta_2)}(0; z_1, z_2) = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} / (\beta_1! \beta_2!)$. Состояния $(0, \gamma_2), (1, \gamma_2)$, $\gamma_2 = 0, 1, \dots$ являются поглощающими. Вероятности остановки процесса равны

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots$$

Для экспоненциальной производящей функции

$$g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots,$$

имеем:

$$g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_{(0,\gamma_2)}(t; z_1, z_2),$$

причем эта функция удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$p_{11} \frac{\partial^2 g_{(0,\gamma_2)}}{\partial z_1 \partial z_2} + p_{02} \frac{\partial^2 g_{(0,\gamma_2)}}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2 g_{(0,\gamma_2)}}{\partial z_1^2} = 0, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots,$$

при граничных условиях

$$g_{(0,\gamma_2)}(0, z_2) = \frac{z_2^2}{\gamma_2!}, \quad \frac{\partial g_{(0,\gamma_2)}(0, z_2)}{\partial z_1} = 0.$$

Общее решение линейного уравнения в частных производных второго порядка находится методом характеристического уравнения [1]. Частное решение имеет вид

$$g_{(0,\gamma_2)}(z_1, z_2) = \frac{p_{02}(z_1+z_2)^{\gamma_2}}{(1+p_{02})\gamma_2!} + \frac{(z_2-p_{02}z_1)^{\gamma_2}}{(1+p_{02})\gamma_2!}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots$$

Для аналогичной экспоненциальной производящей функции $g_{(1,\gamma_2)}(z_1, z_2)$ имеем граничные условия

$$g_{(1,\gamma_2)}(0, z_2) = 0, \quad \frac{\partial g_{(1,\gamma_2)}(0, z_2)}{\partial z_1} = \frac{z_2^2}{\gamma_2!},$$

и решение стационарного первого уравнения

$$g_{(1,\gamma_2)}(z_1, z_2) = \frac{(z_1+z_2)^{1+\gamma_2}}{(1+p_{02})(1+\gamma_2)!} - \frac{(z_2-p_{02}z_1)^{1+\gamma_2}}{(1+p_{02})(1+\gamma_2)!}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots$$

Раскладывая бином по z_1, z_2 , получаем утверждение.

Теорема [2]. Вероятности вырождения равны

$$q_{(0,\alpha_1+\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{p_{02} + (-p_{02})^{\alpha_1}}{1+p_{02}}, \quad q_{(1,\alpha_1+\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{1 - (-p_{02})^{\alpha_1}}{1+p_{02}}, \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots$$

Возможность применения изложенного метода экспоненциальной производящей функции [3, 4] для нахождения явных выражений для вероятностей вырождения марковских процессов или вероятностей остановки случайных блужданий связана со сложностью применения тех или иных методов решения линейных уравнений в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. 6-е изд., доп. М.: Наука, 1975, 128 с.
2. *Кудряшов С. С.* Стохастические аналоги основных детерминированных моделей эпидемий. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 144 с.
3. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
4. *Калинкин А. В., Смирнов А. В.* Вероятности вырождения марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $T_1 \rightarrow 0, T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2016, т. 23, в. 4, с. 356–357.