

В. А. Зотов (Москва, МАИ). **Истечение жидкости из конуса.**

Рассмотрим процесс истечения вязкой несжимаемой жидкости из открытого сверху усеченного конуса высоты H с радиусами верхнего и нижнего оснований R_1 и R_2 через малое отверстие радиуса r на дне.

Скорость истечения жидкости определяется законом Торричелли

$$V(h) = \mu \sqrt{2gh},$$

где μ — коэффициент расхода жидкости ($0 < \mu < 1$); $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения; $h(t)$ — высота уровня жидкости.

Из уравнения материального баланса вытекающей жидкости

$$R^2(h) dh + r^2 V(h) dt = 0$$

следует задача Коши

$$(1 + (k-1)x)^2 \frac{dx}{d\tau} + 2\sqrt{x} = 0; \quad x(0) = 1,$$

имеющая решение

$$(\sqrt{x} - 1) + \frac{2}{3}(k-1)(x\sqrt{x} - 1) + \frac{1}{5}(k-1)^2(x^2\sqrt{x} - 1) + \tau = 0$$

в безразмерных переменных

$$x = \frac{h}{H}; \quad \tau = \frac{t}{T_1}; \quad k = \frac{R_2}{R_1}; \quad T_1 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2,$$

где T_1 — время истечения жидкости из цилиндра высоты H и радиуса основания R_1 через малое отверстие на дне радиуса r .

Время истечения жидкости из конуса находится из условия

$$h(T) = 0$$

и равно

$$T = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{8R_1^2 + 4R_1R_2 + 3R_2^2}{15r^2}$$

или

$$T = \frac{1}{15} (8T_1 + 4\sqrt{T_1T_2} + 3T_2),$$

где T_1 и T_2 — время истечения из цилиндров высоты H с радиусами оснований R_1 и R_2 .

Следовательно, в смысле равенства времени истечения, конус высоты H с радиусами оснований R_1 и R_2 эквивалентен цилиндру той же высоты и радиусом основания R , квадрат которого равен

$$R^2 = \frac{1}{15} (8R_1^2 + 4R_1R_2 + 3R_2^2).$$

Для двух предельных конфигураций конуса время истечения равно

$$t_1 = \frac{8}{15} \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 = \frac{8}{15} T_1 \quad (R_2 \rightarrow 0)$$

$$t_2 = \frac{3}{15} \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(\frac{R_2}{r} \right)^2 = \frac{3}{15} T_2 \quad (R_1 \rightarrow 0).$$

При этом $t_1 = t_2$, если $8R_1^2 = 3R_2^2$ и $t_2 < t_1$, если $R_1 = R_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зотов В. А.* Нелинейная декомпозиция процесса истечения жидкости из резервуара. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 533–534.
2. *Зотов В. А.* Обобщенная модель истечения жидкости из резервуара. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2018, т. 25, в. 3, с. 248–249.