

Я. М. А г а л а р о в (Москва, ФИЦ ИУ РАН). **Признак унимодальности целочисленной функции одной переменной.**

В данном сообщении приводится результат, полученный нами при решении задач оптимального управления очередями в системах массового обслуживания [1].

Теорема. Пусть $F(k)$ — целочисленная функция переменной $k \in ([k_1, k_2] \cap \mathbb{N})$, $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_2 \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_1 < k_2 < \infty$. Если для $F(k)$ выполняется соотношение

$$F(k+1) = F(k) - \alpha(k) [F(k) - G(k)], \quad (1)$$

где $0 < \alpha(k) < 1$, $G(k)$ — невозрастающая функция, $k \in ([k_1, k_2] \cap \mathbb{N})$, то $F(k)$ — унимодальная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два альтернативных случая:

- 1) $F(k_1) \geq G(k_1)$,
- 2) $F(k_1) < G(k_1)$.

Пусть $F(k_1) \geq G(k_1)$. Тогда если $F(k_1) > G(k_1)$, то согласно (1)

$$F(k_1) > F(k_1+1)$$

и, так как $0 < \alpha(k) < 1$, выполняется также

$$F(k_1+1) > G(k_1).$$

Отсюда, так как $G(k)$ не возрастает по $k > 0$, следует, что

$$F(k_1+1) > G(k_1+1).$$

Следовательно,

$$F(k) > G(k) \quad \text{для всех} \quad k_1 \leq k \leq k_2$$

и согласно (1) последовательность $\{F(k), k = k_1, k_1+1, \dots, k_2\}$ является убывающей, т. е. в этом случае $F(k)$ — унимодальная функция с максимальным значением в точке k_1 и минимальным в точке k_2 . Если $F(k_1) = G(k_1)$, то из (1) и того обстоятельства, что $G(k)$ не возрастает по k , следует, что либо

$$F(k) = G(k) = F(k_1), \quad k_1 \leq k \leq k_2,$$

либо существует такое $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, $k_1 < \tilde{k} < k_2$, что

$$F(k) = G(k) = F(k_1), \quad k_1 < k \leq \tilde{k}, \quad F(\tilde{k}+1) > G(\tilde{k}+1).$$

Как уже было показано выше, если $F(\tilde{k}+1) > G(\tilde{k}+1)$, то функция $F(k)$ убывает при $k \in [\tilde{k}+1, \dots, k_2]$. Следовательно, и в этом случае $F(k)$ — унимодальная функция с максимальным значением $F(k_1)$ и минимальным $F(k_2)$ на отрезке $([k_1, k_2] \cap \mathbb{N})$.

Пусть $F(k_1) < G(k_1)$. Согласно (1) из $F(k_1) < G(k_1)$ следует

$$F(k_1+1) > F(k_1)$$

и, так как $0 < \alpha(k) < 1$, следует также

$$F(k_1+1) < G(k_1).$$

Так как $G(k)$ не возрастает по k , то либо

$$F(k_1+1) < G(k_1+1),$$

либо

$$F(k_1+1) \geq G(k_1+1).$$

Таким образом, если последовательно увеличить значение k , то наступит одно из двух событий: если $\min_{k_1 \leq k \leq k_2} G(k) \geq \max_{k_1 \leq k \leq k_2} F(k)$, то получим монотонно возрастающую последовательность $\{F(k), k_1 \leq k \leq k_2\}$, удовлетворяющую условию

$$F(k) < G(k), \quad k_1 \leq k \leq k_2,$$

иначе найдется такое $k' \in \mathbb{N}$, $k_1 < k' \leq k_2$, что

$$F(k') \geq G(k'), \quad F(k) < G(k), \quad k_1 \leq k \leq k'+1.$$

При втором из этих событий

$$F(k+1) > F(k), \quad k \in [k_1, k'-1]$$

(так как $F(k) < G(k)$, $k \in [k_1, k'-1]$) и согласно доказанному для первого альтернативного случая

$$F(k+1) \leq F(k), \quad k \in [k', k_2-1]$$

(так как $F(k') \geq G(k')$). Следовательно, и во втором альтернативном случае $F(k)$ — унимодальная функция на отрезке $([k_1, k_2] \cap \mathbb{N})$.

Исследование функции $G(k)$ на монотонность в некоторых случаях может оказаться решаемой задачей и может значительно упростить доказательство унимодальности целочисленной функции $F(k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаларов Я. М.* Оптимизация объема буферной памяти узла коммутации при схеме полного разделения памяти. — Информатика и ее применения, 2018, т. 12, в. 4, с. 2.