

М. В. Б о л д и н (Москва, МГУ им. Ломоносова). **О мощностях критериев Колмогорова–Смирнова для проверки нормальности авторегрессии.**

Эмпирическая функция распределения остатков и основанные на ней критерии согласия в линейных и нелинейных регрессионных моделях изучаются давно, имеется обширная библиография. В частности, в [1, § 7.7], рассматривалась стационарная $AR(p)$ модель

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

В (1) $\{\varepsilon_t\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н. о. р. с. в.) с неизвестной функцией распределения (ф. р.) $G(x)$; $\mathbf{E} \varepsilon_1 = 0$, $0 < \mathbf{E} \varepsilon_1^2 < \infty$; $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ — вектор таких неизвестных параметров, что корни соответствующего (1) характеристического уравнения по модулю меньше единицы.

Пусть наблюдения $u_{1-p}, \dots, u_n$ — выборка из стационарного решения $\{u_t\}$ уравнения (1), а $\hat{\beta}_n = (\hat{\beta}_{1n}, \dots, \hat{\beta}_{pn})^T$ — любая $\sqrt{n}$ -состоятельная оценка вектора β , построенная по этим наблюдениям, например, оценка наименьших квадратов. Величины $\hat{\varepsilon}_t = u_t - \hat{\beta}_{1n} u_{t-1} - \dots - \hat{\beta}_{pn} u_{t-p}$, $t = 1, \dots, n$, называются *остатками*, а функция

$$\hat{G}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{I}\{\hat{\varepsilon}_t \leq x\}, \quad x \in \mathbf{R}^1,$$

называется остаточной эмпирической функцией распределения. ($\mathbf{I}\{\cdot\}$ означает индикатор события.) Мы займемся проверкой гипотезы

$$H_\Phi: G(x) \in \left\{ \Phi\left(\frac{x}{\theta}\right), \theta > 0 \right\}, \quad \Phi(x) — \text{функция Лапласа,}$$

о нормальности инноваций. Гипотеза H_Φ эквивалентна нормальности самой авторегрессионной последовательности $\{u_t\}$.

Будем использовать критерии типа Колмогорова–Смирнова. Пусть θ_0^2 будет истинной неизвестной дисперсией инноваций при гипотезе H_Φ , т. е. ф. р. инноваций при гипотезе есть $\Phi(x/\theta_0)$. Оценкой θ_0^2 будем брать статистику

$$\hat{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2.$$

Введем остаточный случайный процесс

$$\hat{v}_n(x) = \sqrt{n} \left[\hat{G}_n(x) - \Phi\left(\frac{x}{\hat{s}_n}\right) \right], \quad x \in \mathbf{R}^1.$$

Сделав замену $t = \Phi(x/\theta_0)$, получим процесс

$$\hat{u}_n(t) := \hat{v}_n(\theta_0 \Phi^{-1}(t)), \quad t \in [0, 1].$$

В [1] показано: при H_Φ процесс $\hat{u}_n(t)$ слабо сходится в пространстве Скорохода $D[0, 1]$ к гауссовскому случайному процессу $u(t)$ с нулевым средним и ковариацией

$$\min\{t, s\} - ts - \frac{1}{2} \Phi^{-1}(t) \varphi(\Phi^{-1}(t)) \Phi^{-1}(s) \varphi(\Phi^{-1}(s)), \quad \varphi(x) = \Phi'(x).$$

Наша статистика типа Колмогорова–Смирнова для H_Φ имеет вид

$$\widehat{D}_n := \sup_x |\widehat{v}_n(x)| = \sup_t |\widehat{u}_n(t)|.$$

В силу сказанного, при H_Φ статистика $\widehat{D}_n$ слабо сходится к $\sup_t |u(t)|$. Квантили ф. р. последней случайной величины оценены, см. [2], а значит, статистику $\widehat{D}_n$ можно применять для проверки H_Φ .

Упомянутые факты были установлены только при гипотезе H_Φ . Цель настоящей работы — установить слабый предел в $D[0, 1]$ процесса $\widehat{u}_n(t)$ и найти мощность основанных на нем статистик $\widehat{D}_n$ при локальных альтернативах.

А именно, далее предполагается, что $\{\varepsilon_t\}$ в (1) — н. о. р. с. в. с ф. р. $A_n(x)$ в виде смеси

$$A_n(x) := (1 - \rho_n) \Phi\left(\frac{x}{\theta_0}\right) + \rho_n H(x), \quad H(x) \text{ — ф. р., } \rho_n = \min\left\{1, \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right\}, \quad \rho \geq 0.$$

Это предположение будем понимать как локальную альтернативу A_Φ к H_Φ .

Условие (i). Случайная величина с ф. р. $H(x)$ имеет нулевое среднее и конечную дисперсию θ_H^2 , а сама ф. р. $H(x)$ дважды дифференцируема с ограниченной второй производной.

Вот наш основной результат.

Теорема. Пусть верна альтернатива A_Φ . Тогда при условии (i)

$$\widehat{u}_n(t) \xrightarrow{D[0,1]} u(t) + \delta(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

где для сдвига $\delta(t)$ справедливо выражение

$$\delta(t) = \rho \left\{ H(\theta_0 \Phi^{-1}(t)) - t + \frac{1}{2} \Phi^{-1}(t) \varphi(\Phi^{-1}(t)) \left(\frac{\theta_H^2}{\theta_0^2} - 1 \right) \right\}.$$

Кроме того,

$$\widehat{D}_n \xrightarrow{d} \sup_t |u(t) + \delta(t)|, \quad n \rightarrow \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boldin M. V., Simonova G. I., Tyurin Yu. N. Sign-Based Methods in Linear Statistical Models. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.
2. Pearson E. S., Hartley H. O. Biometrika Tables for Statisticians. V.2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1972.